

天井から吊した振り子やバネの先に付けた錘の運動は、**単振動の運動方程式**を満たす。最も単純な系は**理想的なバネ**である。右図のように、質量の無視できるバネの先端に付けた質量 m の質点の平衡位置 x_0 から $x=x'-x_0$ だけバネが伸ばされると、それに比例した平衡位置へ戻ろうとする**復元力** $F=-kx$ が質点に働く。従って、運動方程式は、

$$d^2x/dt^2 = F/m = -(k/m)x \quad (1)$$

となる。

同様に図2の様に、天井から吊した質量の無視できる長さ ℓ の糸の先端に質量 m の質点付けた振り子も、振動の振幅が小さい場合には、近似的に**単振動**と考える解析することが出来る。質点に働く力は重力のみである。振り子の運動は、点線で表した弧上のみに限定された**束縛運動**になる。そこで、質点の位置の弧の接線方向と糸の方向に重力を分割して考える。糸方向成分 $mg \cos\theta$ は、糸の張力と釣り合い、質点の運動には寄与しないので、接線方向成分 $mg \sin\theta$ のみを接線方向の運動方程式に考慮しよう。弧上の変位 s は、振り子の平衡位置からの振れ角 θ と $s = \ell\theta$ の関係にあるので、運動方程式は、

$$d^2s/dt^2 = \ell d^2\theta/dt^2 = F/m = -g \sin\theta \quad (2)$$

となる。ここで、 ℓ = 一定、を使った。 $\theta \ll 1$ (rad) の仮定の元で $\sin\theta \approx \theta$ の近似を行い（注：角度は無次元量。半径 (radius) で測った弧の長さ s は **radian (rad)**）、

$$d^2\theta/dt^2 = -(g/\ell) \sin\theta \approx -(g/\ell) \theta \quad (3)$$

と整理できる。変数が x と θ の、及び、右辺の係数 (k/m) と (g/ℓ) の2つの見かけの違いを除けば (1) と (2) は同一の微分方程式であることが分かる。即ち、これらの微分方程式は、

$$d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$$

と書くことが出来る。ここで、 ω_0^2 は、**単位変位、単位質量当たりの復元力**を表し、単振動の最も大事なパラメータである。**バネの場合**には、 $\omega_0^2 = k/m$ で、(1) 式第2辺、第3辺から単位質量 m 、単位変位 x 当たりの復元力 $(= F/mx = k/m)$ であることは容易に分かる。**単振り子の場合**も、単位質量 m 、単位変位 $\ell\theta$ 当たりの復元力 $(= F/m\ell\theta = g/\ell)$ は容易に確認できる。

これらの運動方程式を解く時に、時間について両辺を直接積分する事は出来ない。なぜならば、右辺の x は時間の関数 $x(t)$ であり、どのような関数であるかは、単振動の運動方程式を解かなければ決定できないからである。即ち、 $x(t)$ を求めたい時に $x(t)$ を直接時間 t では積分出来ない事は自明である。そこで、3つの解法を見ていこう。一つは、発見的方法、エネルギー積分の方法、もう一つは特性方程式の方法である。

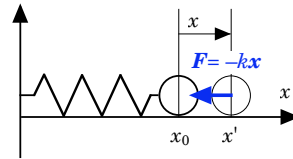


図1：バネと復元力

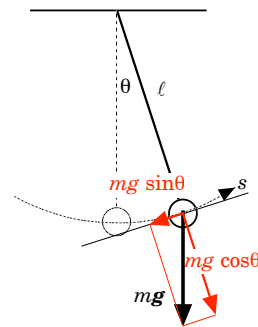


図2：振り子と復元力

1) 発見的方法

運動方程式 (1) を見ると、求めたい関数 $x(t)$ を時間で2回微分すると、負号を付けた元の関数 $x(t)$ に比例している。このような関数は、三角関数か指数関数以外には無いことに注目して、**(振り子の場合は $x = \ell\theta$ であることに注意。特に、 $v = \ell d\theta/dt$ となる点に要注意)**

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4)$$

と置いてみる。運動方程式 (1) を満たす A, B, ω の条件を求める事が出来れば、それが運動方程式の解であることは明らかであろう。ここで、 A, B は積分変数であり、運動方程式が時間の2回微分方程式である事から、2つの積分変数が必要になる。

次に、(4) 式が運動方程式を満たすべき条件を探すために、(1) 式に代入する。すると、左辺は、

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\omega^2 x$$

と求まる。右辺と等しいので、

$$\omega^2 = \omega_0^2$$

が、(4) 式が運動方程式を満たすための条件になる。即ち、

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

が運動方程式 (1) の一般解を与える。一般解とは、2回積分した分の積分定数を含む解であり、任意の初期条件の元で、バネや振り子の運動を表現できる。

一般解に初期条件を代入すると、その初期条件の(特別)解が得られる。例えば、変位 x_0 で固定した状態から、時刻 $t=0$ に初速 $v=0$ で運動を開始する場合は、

$$x(0) = B = x_0$$

$$v(0) = dx/dt|_{t=0} = \omega_0(A \cos \omega_0 t - B \sin \omega_0 t)|_{t=0} = \omega_0 A = 0$$

から、

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

が求まる。一方、時刻 $t=0$ で $x=x_0$ 、 $v=v_0$ の場合には、

$$x(0) = B = x_0$$

$$v(0) = dx/dt|_{t=0} = \omega_0(A \cos \omega_0 t - B \sin \omega_0 t)|_{t=0} = \omega_0 A = v_0$$

より、この場合の特解は、

$$x(t) = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = v_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

と得られる。また、時刻 $t=0$ で $x=0$ 、 $v=v_0$ の場合には、

$$x(t) = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$$

$$v(t) = v_0 \cos \omega_0 t$$

の特解が得られる事は容易に示せる。

2) エネルギー積分を使う方法

エネルギー積分とは、運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

を積分する際に、両辺に速度 $v=dx/dt$ を掛けて積分する方法を指す。その結果がエネルギーの次元を持つことから、エネルギー積分と呼ばれる。

$$mv \frac{d^2x}{dt^2} = -kxv = -kx \frac{dx}{dt}$$
$$mv \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = mv \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

両辺に dt を掛けて積分すると、

$$\frac{mv^2}{2} = m \int v dv = -k \int x dx = -\frac{kx^2}{2} + \text{const.} \quad (6)$$

が得られる。左辺は錘の運動エネルギーを、右辺の第1項はバネの位置エネルギーを表し、左辺に移項すると、全運動エネルギーが時間によらず一定、という**エネルギー保存則**になっている事が分かる。積分定数を $kC^2/2$ と書き換えると、

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{m} (C^2 - x^2) = \omega_0^2 (C^2 - x^2), \quad \frac{dx}{dt} = \pm \omega_0 \sqrt{C^2 - x^2} \quad (7)$$

と変形できる。最後の式を見ると、右辺は x のみの関数なので、両辺を $\sqrt{C^2 - x^2}$ で割って dt を掛けると変数が両辺に分離され、両辺を積分することが出来る (**変数分離法**)。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm \omega_0 \int dt = \pm \omega_0 t \quad (8)$$

左辺の積分を進めるために変数変換を行う。

$$x = C \sin \theta$$

と置くと、 $dx = C \cos \theta d\theta$ なので、(8) の左辺は、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \int \frac{C \cos \theta d\theta}{\sqrt{C^2 - C^2 \sin^2 \theta}} = \int d\theta = \theta \quad \left(= \sin^{-1} \frac{x}{C} \right) \quad (\text{逆三角関数})$$

と積分でき、位相角 θ に等しいことが分かる。 $t \geq 0$ に対応して $\theta \geq 0$ の領域を選べば

$$\theta = \omega_0 \int dt = \omega_0 t + \phi$$

より、単振動の一般解として

$$x = C \sin(\omega_0 t + \phi)$$

が得られる。

$$C \sin(\omega_0 t + \phi) = C (\cos \phi \sin \omega_0 t + \sin \phi \cos \omega_0 t)$$
$$= A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t, \quad (A = C \cos \phi, B = C \sin \phi)$$

から、1) で求めた一般解に等しい解が求まる。

3) 特性方程式による方法

一つの変数の高階の線形微分方程式に用いられる特性方程式を用いて解くことが出来る。運動方程式

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$$

に試行関数として $e^{\lambda t}$ を代入して得られる特性方程式の解を用いて必要な数の特解を得る：

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$ として 0 でない解を得る条件として

$$\lambda^2 = -\omega_0^2, \lambda = \pm i\omega_0$$

が得られる。これより、2つの特解

$$x = e^{i\omega_0 t} \quad \text{および} \quad e^{-i\omega_0 t}$$

が求まったことになる。2階微分方程式の一般解は、2つの特解の線形結合で与えられるので、一般解として、

$$x = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

が得られる。 $e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm i \sin \omega_0 t$ (逆に解くと、 $\cos \omega_0 t = (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})/2$ 、 $\sin \omega_0 t = (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})/2i$) を代入すると、

$$x = (A+B) \cos \omega_0 t + i(A-B) \sin \omega_0 t$$

と変形される。変位 x は実数でなければいけないので、 $A-B$ は純虚数、即ち、 A と B は複素共役の関係になっていなければならない。ここで、 $A = A_r + iA_i$ とすると、**虚部のみに負号**を付けて $A^* = A_r - iA_i$ と表現し、 A^* を A の**複素共役**、complex conjugate と呼ぶ。時には頭文字を取り、*c.c.* と略することもある。結局、

$$x = (A+A^*) \cos \omega_0 t + (A-A^*) \sin \omega_0 t = 2A_r \cos \omega_0 t + 2A_i \sin \omega_0 t$$

と1) で得た一般解と同一の形が得られる。

4) エネルギー積分による振子の解

振子の運動方程式は

$$d^2\theta/dt^2 = -(g/l) \sin\theta$$

と書ける。両辺に速度 $v=l d\theta/dt$ を掛けて、左辺を ω に変換すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) &= \omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \end{aligned} \quad (5)$$

となり、更に、両辺に dt を掛けて積分すると、

$$\frac{\omega^2}{2} = \int \omega d\omega = -\frac{g}{l} \int \sin\theta d\theta = \frac{g}{l} (\cos\theta + C). \quad (6)$$

が得られる（右辺は「常に正」に注意： $\theta < \pi/2$ の時、 $C > 0$ ）。左辺を θ に戻して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2\frac{g}{l} (C + \cos\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (C + \cos\theta)} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (C+1 - 2\sin^2(\theta/2))} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l} (k^2 - \sin^2(\theta/2))} \end{aligned} \quad (7)$$

と変形できる（ $2k^2 = C+1 > 0$ ）。最後の式を見ると、右辺は θ のみの関数なので、両辺

を $\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}$ で割って dt を掛けると変数が両辺に分離され、両辺を積分することが出来る（変数分離法）。

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \int dt = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8)$$

左辺の変数変換を次のように行う。

$$\sin(\theta/2) = k \sin\phi$$

と置き両辺を ϕ で微分し、 $(1/2)\cos(\theta/2) d\theta = (1/2)\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)} d\theta = k \cos\phi d\phi$ から、

$$d\theta = \frac{2k \cos\phi d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)}} = \frac{2k \cos\phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} \quad \text{が得られ、(8) の左辺は、}$$

$$\int_0^\phi \frac{2k \cos\phi d\phi}{k \cos\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} = \int_0^\phi \frac{2d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}$$

となり、（両辺を2で除して）

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

の楕円積分を得る。

調和振動子

単振動する系においては、変位に比例する復元力

$$F = -kx$$

が働く。従って、変位すると運動エネルギーにより仕事をし、その分の位置エネルギー U を得る：

$$W = \int_0^x F \bullet dx = -k \int_0^x x dx = -\frac{kx^2}{2} = -U.$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和は、

$$E = T + U = \frac{P^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = T_0 (= P_0^2/2m) = U_0 (= kx_0^2/2)$$

で与えられる。ここで、 P_0 は変位が0の時の最大運動量で、 x_0 は速度が0の時の最大変位を表す。バネ定数 k を固有振動数 ω_0 で表すと、

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

となる。単振動の場合には、変位を微分して速度を得るが、その際に、係数として ω_0 が出てくることを考慮すると、全運動エネルギーが時間に依存しないことは直ぐに分かる。