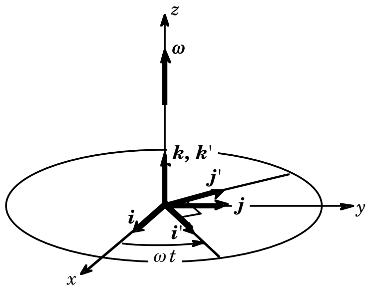
回転運動をしているときの相対運動 I



空間に固定されている座標系（慣性系）を $O\text{-}xyz$、角速度ωで回転している座標系（例えば自転する地球やメリーゴーラウンド）を $O'\text{-}x'y'z'$ とする．それぞれの軸の基本ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$、 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ とする．O' 系の基本ベクトル $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ の時間変化率は（注１参照）

$$\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = \omega \times \boldsymbol{i}'、\ \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} = \omega \times \boldsymbol{j}'、\ \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = \omega \times \boldsymbol{k}'$$

なので、点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ （地表の大気の位置ベクトルやメリーゴーラウンドの上を歩く子供の位置ベクトル）、

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

の時間変化率（質点 P の慣性系での速度）は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left\{\left(\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'\right) + \left(x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(v_x{}'\boldsymbol{i}' + v_y{}'\boldsymbol{j}' + v_z{}'\boldsymbol{k}'\right) + \omega\times\left(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'\right)\right\} = \boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{r}$$

ここで、$\omega \times \boldsymbol{r}$ は座標の回転運動に起因する速度、$\boldsymbol{v}'$ は回転座標系で見た点 P の相対速度

.

これを使って慣性系 $O\text{-}xyz$ から見た加速度 $\boldsymbol{a}$ は、速度 $\boldsymbol{v}$ を微分して

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d(\omega \times \boldsymbol{r})}{dt}$$

$\boldsymbol{v}'$ に $v_x{}'\boldsymbol{i}' + v_y{}'\boldsymbol{j}' + v_z{}'\boldsymbol{k}'$ を代入して、 $\frac{dv_x{}'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dv_y{}'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dv_z{}'}{dt}\boldsymbol{k}'$ を $\boldsymbol{a}'$ （回転座標系 $O'\text{-}x'y'z$ の上で見た点 P の相対加速度）と置くと

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \omega \times \boldsymbol{v}' + \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} + \omega \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{a}' + \omega \times \boldsymbol{v}' + \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} + \omega \times (\boldsymbol{v}' + \omega \times \boldsymbol{r})$$

$$= \boldsymbol{a}' + \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} + 2\omega \times \boldsymbol{v}' + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r})$$

従って、相対加速度 $\boldsymbol{a}'$ は

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} - 2\omega \times \boldsymbol{v}' - \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r})$$

相対加速度に質量 m をかけて、$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ を代入して、相対運動の運動方程式

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\omega \times \boldsymbol{v}' - m\omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}) - m\frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r}$$

慣性力（見掛の力）: コリオリ力 遠心力 回転速度の変化

が得られる.

回転運動をしているときの相対運動 II

慣性系に固定されている座標系をO-xyz とする．ベクトル $\boldsymbol{r}$ は、角速度 ω で回転する座標系 $O'\text{-}x'y'z'$ の上に乗っている．微少時間 dt の間に、 $\boldsymbol{r}$ ベクトルは角度 ωdt だけ回転するので、PQの長さは $(\omega \times \boldsymbol{r})dt$ となる．

さて、O-xyz 座標から点Pを観測すると、ベクトル $\boldsymbol{r}$ は$d\boldsymbol{r}$ だけ変化するが、ω で回転する座標系で見た場合には、$(d\boldsymbol{r})'$ だけ変化した様に見える．実際の変化はPQ+$(d\boldsymbol{r})'$ なので

$d\boldsymbol{r} = (d\boldsymbol{r})' + \mathrm{PQ} = (d\boldsymbol{r})' + (\omega \times \boldsymbol{r})\,dt$　　(1)　　（$\mathrm{PQ} = (\omega \times \boldsymbol{r})\,dt$ については注１参照）

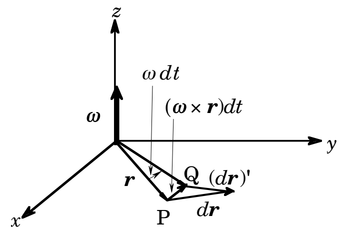
と書ける．これを時間で微分すると速度 $\boldsymbol{v}$ が得られる．

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)' + \omega \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}' + \omega \times \boldsymbol{r} \qquad (2)$$

（$\boldsymbol{v}$：慣性系で見た速度、$\boldsymbol{v}'$：ω で回転する座標系で見た相対速度、$\omega \times \boldsymbol{r}$：$\omega$ で回転する座標軸による速度）従って、回転する座標に乗って観測した相対速度 $\boldsymbol{v}'$ は

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \omega \times \boldsymbol{r}$$

（真の速度 $\boldsymbol{v}$ から、座標軸の回転による速度 $\omega \times \boldsymbol{r}$ を差し引いたもの）となる．



加速度も (1) 式と同様に、$d\boldsymbol{v}$ は

$$d\boldsymbol{v} = (d\boldsymbol{v})' + (\omega \times \boldsymbol{v})\,dt \qquad (3)$$

となるので、

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)' + \omega \times \boldsymbol{v} \qquad (4)$$

が得られる．(4) 式の $\boldsymbol{v}$ に(2) 式を代入し、

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\right)' + \left(\frac{d(\omega \times \boldsymbol{r})}{dt}\right)' + \omega \times (\boldsymbol{v}' + \omega \times \boldsymbol{r}) = \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\right)' + \omega \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)' + \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} + \omega \times \boldsymbol{v}' + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r})$$

$$= \boldsymbol{a}' + 2\omega \times \boldsymbol{v}' + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}) + \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r}$$

となる．ここで相対加速度を、$\boldsymbol{a}' = \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\right)'$ とおいた．加速度 $\boldsymbol{a}$ に質量 m をかけ、$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ を代入すると、相対運動の運動方程式として

$$m\boldsymbol{a}' = m\left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\right)' = \boldsymbol{F} - 2m\omega \times \boldsymbol{v}' - m\omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}) - m\frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r}$$

慣性力(見掛の力) : コリオリ力 遠心力 回転速度の変化

が得られる.

****

注１

一般的に回転軸（ω に平行）に角度 ϕ をなすベクトル $\boldsymbol{r}$ を考える．このベクトルが、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する座標に固定されている時に、$\mathrm{d}t$ の時間に変化する量は、回転角 $\omega\,\mathrm{d}t$ に回転半径 $r\,\sin\phi$ をかけて得られる．

$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \omega\,\mathrm{d}t\;\; r\,\sin\phi = (\omega\, r\,\sin\phi)\,\mathrm{d}t$

$\omega\, r\,\sin\phi$ は$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|$ の定義に等しいので

$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

と与えられる．ここで、 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ に置き換えればよい．