

保存力

力学的全エネルギーの保存則を満たすような力を保存力と呼ぶ。それはどのような力か調べてみよう。簡単のために、ニュートンの運動方程式の s 成分、

$$m \frac{dv_s}{dt} = F_s \quad (1)$$

を考えよう。(1) 式の左辺に $ds/ds = 1$ を掛けて s_1 から s_2 まで積分すると、運動エネルギーの変化分と為された仕事量の関係が得られる（両辺に速度 v を掛けても良い）：

$$m \frac{ds}{dt} \frac{dv_s}{ds} = mv_s \frac{dv_s}{ds} = F_s, \quad m \int_{v_{s_1}}^{v_{s_2}} v_s dv_s = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds,$$

$$\frac{mv_{s_2}^2}{2} - \frac{mv_{s_1}^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W. \quad (2)$$

ここで、 $\frac{mv^2}{2}$ は運動エネルギー、そして、 $\int_{s_1}^{s_2} F_s ds$ は外力 F_s がその物体を位置 s_1 から s_2 まで移動させる間に物体に為した仕事量 W である。すなわち、外力がした仕事 W が、運動エネルギーの形に変わった事を示し、力学的全エネルギーの保存則が成立つことに対応している。この時に、場（地表であれば「重力場」、電磁氣的力であれば「電場」など）に内在する（すなわち、ポテンシャル）エネルギー U が物体に仕事をすると考えられ、 $W = U(s_1) - U(s_2) = -(U(s_2) - U(s_1))$ と書け、移動の経路に依らず、位置 s_1, s_2 のみに依存する：

$$\frac{mv_{s_2}^2}{2} - \frac{mv_{s_1}^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = -(U(s_2) - U(s_1)). \quad (3)$$

$$\frac{mv_{s_2}^2}{2} + U(s_2) = \frac{mv_{s_1}^2}{2} + U(s_1) = E_T. \quad (4)$$

ここで、 E_T は力学的全エネルギーで、この運動の保存量である全力学的エネルギーを表している。このように、ポテンシャルエネルギーの勾配に起因する力が働く場合にはエネルギー保存則が成り立ち、その力を保存力と呼ぶ。(3) 式の第 2 辺と 3 辺を $s_2 - s_1 = \Delta s$ （微少量なので、 F_s はその間で一定として良い）で除して、ゼロの極限を取れば保存力は、

$$F_s = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{U(s_1 + \Delta s) - U(s_1)}{\Delta s} = - \frac{\partial U}{\partial s}, \quad (5)$$

と書くことが出来る。 U の例としては、重力場、バネ、電場などによるポテンシャルエネルギーがある。

地表の重力場 $U(h) = mgh(s)$ の例で考えると、山や谷の凹凸が重力場の依存性を表す。(5) 式から、我々の体験から良く知られた形、山の傾斜 $\sin\theta$ に比例した力、

$$F_s = - \frac{\partial U}{\partial s} = - \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial s} = - mg \frac{\partial h}{\partial s} = - mg \sin\theta,$$

を傾斜の $-s$ の方向に受けることが出てくる。

