III．惑星の運動

１．万有引力ポテンシャル（*m*=1の場合の万有引力ポテンシャルエネルギー）

質量 m の質点が、質量 M の質点から万有引力 $F=-\dfrac{GMm}{r^2}$ を受けている． G は万有引力定数で、$6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ の大きさを持つ．万有引力（重力）は、エネルギー保存則を満たす保存力なので、ポテンシャルエネルギーの微分、 $F=-\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}$ で与えられる．従って、無限遠方を基準に取ったときのポテンシャルエネルギー $V(r)$ は、

$$V(r)=\int_{\infty}^{r}\frac{GMm}{r^2}dr=\left[-\frac{GMm}{r}\right]_{\infty}^{r}=-\frac{GMm}{r} \qquad (1)$$

となる．

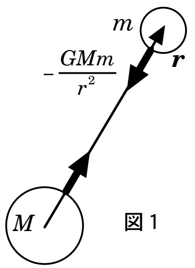


図１

２．地表での位置エネルギー、*mgh*

位置エネルギーは地表面近傍での万有引力ポテンシャルエネルギーである．地表面を原点として、高さ h の位置エネルギーは mgh である．
(1) 式の万有引力ポテンシャルとの関係を考えてみよう．

地表面に対する高さ h の位置エネルギーは地球の重心から測った距離、$R+h$ と R における万有引力ポテンシャルエネルギーの差を取ったものに相当する：

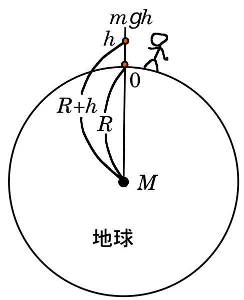
$$mgh=-\frac{GMm}{R+h}-\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{1}{1+h/R}\right)$$

$$=\frac{GMm}{R}\left(\frac{h/R}{1+h/R}\right)\approx\left(\frac{GM}{R^2}\right)mh、\quad\left(\because\ \frac{h}{R}<<1\right).$$

従って、地表での重力加速度は

$$g=\frac{GM}{R^2} \qquad (2)$$

と定義される．



演習問題

G=6.67×10^{-11} Nm^2/kg^2 、$M_{地球}$=5.97×10^{24} kg、$R_{地球}$=6.37×10^6 kg、を用いて地表での重力加速度 g を計算せよ．

３．中心力場における角運動量保存則

太陽の周りを回る惑星に働く主な力は、太陽による万有引力である．図１の M を太陽、m を惑星とすると、働く力は常に太陽から測った位置ベクトルと反平行なので、惑星に働く力のモーメントは、 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}=0$ と常にゼロである．従って、回転の運動方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=0$ から、中心力場中では常に角運動量保存則が成立っている．この事実は、ケプラーの第二法則、面積速度一定と等価である．また、面積速度一定の法則は、慣性運動する系に成立つことが示される．すなわち、惑星は慣性運動をしながら、太陽の万有引力により落下し続けていることを意味している．

４．有効（遠心力）ポテンシャルとブラックホール

中心力のみが働く時、質量 m の質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を極座標で表そう：動径方向成分 $v_r=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ と θ 方向成分 $v_\theta=r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ．これより、速度の２乗は

$v^2=v_r{}^2+v_\theta{}^2=v_r{}^2+(r\omega)^2$

となり、$\omega^2=\left(\dfrac{L}{mr^2}\right)^2$ を代入して、運動エネルギーが

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_r{}^2}{2}+\frac{m(r\omega)^2}{2}=\frac{mv_r{}^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}$$

となる．万有引力ポテンシャルエネルギー $V=-\dfrac{GMm}{r}$ を加えれば、力学的全エネルギー E_{T} の保存則を

$$E_{\mathrm{T}}=\frac{mv_r{}^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=\frac{mv_r{}^2}{2}+U_{\mathrm{eff}}=\mathrm{const.} \qquad (3)$$

と書くことが出来る．ここで、 $U_{\mathrm{eff}}=\dfrac{L^2}{2mr^2}-\dfrac{GMm}{r}$ を有効（遠心力）ポテンシャルと呼ぶ．中心力場の角運動量保存則から L は定数なので、U_{eff} は図３に示すように、r に対して $\dfrac{C_1}{r^2}-\dfrac{C_2}{r}$ と振る舞う．力学的全エネルギーが負の場合には、惑星が運動できる太陽からの距離は、r_{min} と r_{max} の間に限られる（楕円運動．これらの位置では軌道は半径と垂直で、v_r=0）．動径方向の運動エネルギー、 $\dfrac{mv_r{}^2}{2}$ 、がゼロの場合は軌道半径が一定なので、円運動になる．(3) 式の両辺を距離 r で微分すれば、万有引力が円運動に必要な向心力になっていることが確かめられる． E_{T} =0 の時は放物線、 $E_{\mathrm{T}}>0$ の時は双曲線軌道を持つ．

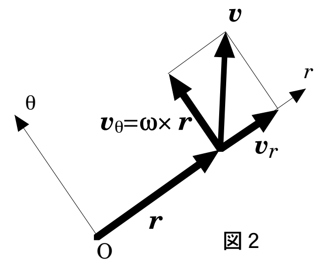


図２

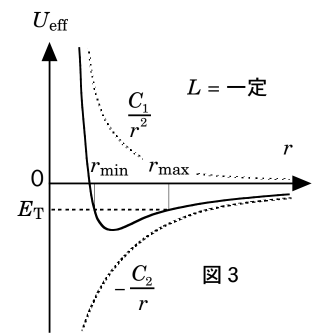
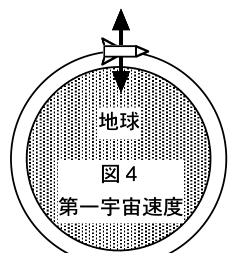


図３

質点が、リンゴのように万有引力で地上に落ちてしまわない理由は、向心力による落下につり合う速さを持っているからである．図３から分るように、半径 r が小さくなるとバランスさせるのに必要な質点の速さは急激に増大し、終いには、上限である光速で廻っても円運動が保てなくなり、引力ポテンシャルに吸い込まれていく．これが**ブラックホール**である．

５．重力圏からの脱出

図３に示したように、力学的全エネルギー E が負の場合には、運動できる r の範囲が r_{min} と r_{max} の間に限定されることが分る．例えば、地球の重力圏から飛び出して火星に行くためには、地球の重力ポテンシャルよりも運動エネルギーが大きい（力学的全エネルギー E_{T} が正である）必要がある．



演習問題

１． 地表面で重力と遠心力の大きさが等しくなる速度は、第一宇

宙速度と呼ばれている．重力加速度を9.8 m/s^2、地球の半径を6,500 km とした時の第一宇宙速度を求めよ．

２． ロケットが地球の重力圏を脱出するためには力学的全エネルギー $E_T = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$ が正になる必要がある．これから、地球の重力圏を脱出するのに必要な速度（第二宇宙速度）を求めよ．

３． 光速を 3×10^8 m/s、万有引力定数を 7×10^{-11} Nm^2/kg^2、また、ブラックホールの密度が原子核の密度、$\rho = 3\times10^{17}$ kg/m^3 に等しいとする．ブラックホールの表面（半径）で力学的全エネルギーがゼロ或いは負になる条件から、光の速度で運動する質点が重力ポテンシャルから脱出出来なくなるブラックホールの半径 R_B を求めよ．その時の質量 M_B も計算せよ．それは太陽の質量 $M_S = 2\times10^{30}$ kg の何倍か．

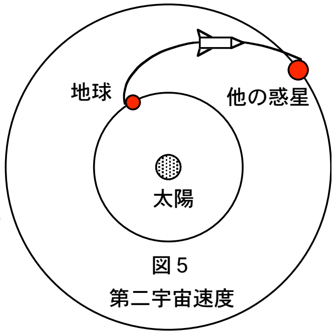


図５
第二宇宙速度

６．動径方向の運動方程式

次に、運動方程式を考えよう．(3) 式の全力学的エネルギー E_T を r で微分すると

$$m\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0$$

、（なぜなら、$\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r^2\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(2\frac{dr}{dt}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right) = m\frac{d^2r}{dt^2}$）

が得られるので、$m\frac{dv_r}{dt}$ について解くと、動径方向の運動方程式

$$m\frac{dv_r}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \qquad (4)$$

が得られる．右辺第一項は遠心力、第二項は万有引力を表す． 動径方向に関する運動について解いたので、質点と一緒に回りながら r の変化のみを見ていることに相当するため、慣性力として遠心力が現れてくる．

同じように (3) 式の全力学的エネルギー E_T を θ で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}(r\omega)^2 - \frac{GMm}{r}\right) = 0$$

$$\frac{mr^2}{2}\left(2\omega\frac{d\omega}{d\theta}\right) = mr^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\omega\right) = \frac{dL}{dt} = 0$$ より、 L = 一定、

が得られ、中心力場では角運動量 L が保存することが示される．このことは、回転の運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$ において、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ が平行なので（図１参照）、 力のモーメントが常にゼロになることに対応している．

７．ケプラーの法則

１６世紀後半に Ticho Brahe は惑星の運動の精密な観測を行った．その助手であった Kepler は、その観測結果から次の３つの法則を見出した．

第一法則
惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である（図６参照）

第二法則
太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に掃過する面積は等しい（面積速度一定 = 角運動量一定）

第三法則
惑星が太陽を一周する時間（周期）T の２乗と軌道の長軸半径 a の３乗の比は、全ての惑星について同じ値を持つ（a^3 / T^2 = 一定）

８．ケプラーの第一法則

中心力場中の動径方向の運動方程式 (4) 式を時間の代りに θ の関数で表して解き、惑星の軌道を求めて見よう．$r = r(\theta)$ と表すと、角運動量の定義式、$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{L}{mr^2}$ より

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) \qquad (5)$$

となる．ここで、変数変換 $u = \frac{1}{r}$ を行うと、$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = u^2\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{d\theta}$ なので、(5) 式に代入すると、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

となり、運動方程式は (4) 式の r を $\frac{1}{u}$ に変換して、

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{L^2u^3}{m} - GMmu^2$$

となる．これは、両辺を $-\frac{L^2u^2}{m}$ で除してやると単振動の式に相当する、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} = \text{一定}$$

が得られる．この式の解は

$$u = A\cos\theta + \frac{GMm^2}{L^2}$$

とかけるので、 $u = \frac{1}{r}$ を戻してやると、

$$r = \frac{1}{u} = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta} \qquad (6)$$

と整理される．ここで、ℓ と e （離心率）は、それぞれ、

$\ell = \frac{L^2}{GMm^2}$ 、 $e = \frac{AL^2}{GMm^2}$

で与えられる．この軌道は、e の値によって円（$e = 0$）、楕円（$0 < e < 1$）、放物線（$e = 1$）、双曲線（$e > 1$）軌道を取る（図６）．

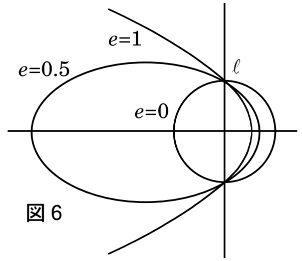


図６

９．第二法則：面積速度一定 = 角運動量一定

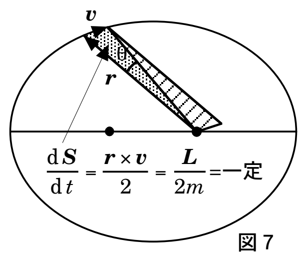


図７

動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ が単位時間に掃く面積、面積速度 $v_S = \frac{dS}{dt}$ は、図７の動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の作る平行四辺形の面積（$= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$）の半分に等しいから、

$\boldsymbol{v}_S = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{2} = \frac{\boldsymbol{L}}{2m}$、 ここで、$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$、

で与えられる．一方、惑星に働く力は万有引力なので、常に太陽と惑星を結ぶ直線上にある

（中心力）．従って、$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$ となり、回転の運動方程式から、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N} = 0、\quad \therefore L = 一定$$

が成り立ち、面積速度が一定であることが示される．

１０．第三法則：$\frac{\boldsymbol{a}^3}{\boldsymbol{T}^2}$ = 一定

　この法則も中心力場中で運動している惑星の運動に特徴的な法則である．

太陽の万有引力が作る中心力場中で、惑星が円運動を続けるためには、中心力 $-\frac{GMm}{a^2}$ と遠心力 $ma\omega^2$ がつりあっている必要がある：

$$ma\omega^2 - \frac{GMm}{a^2} = 0$$

公転周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を代入して、

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = 一定 \qquad (7)$$

が導かれる．

　一般的には楕円運動なので、楕円運動の周期 T^2 を考えると、楕円の面積 πab を面積速度 $L/2m$ で割って

$$T^2 = \pi^2 a^2 b^2/(L^2/4m^2)$$

で与えられる。楕円の長軸長 a と短軸長 b の関係式、$b^2 = a\ell$ と

$$L^2/m^2 = \ell GM$$

を代入して

$$T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$$

より、長軸長 a を用いて

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = 一定$$

が得られる。

表１　ケプラーの第三法則の実験的証拠

	周期 T (年)	軌道半径 a（AU）	T^2/a^3 (年^2/AU^3)
水星	0.2409	0.3871	1.000
金星	0.6152	0.7233	1.000
地球	1.0000	1.0000	1.000
火星	1.8809	1.5237	1.000
木星	11.862	5.2028	0.999
土星	29.457	9.5388	1.000
天王星	84.075	19.1914	1.000
海王星	164.821	30.0611	1.000
冥王星	248.541	39.5294	1.000