

斜面上の質点の運動

摩擦のない角度 θ の斜面を滑る質点の運動を考えよう。 x -座標を斜面の上方に取り、 y -座標は斜面の鉛直上方に取る。

質点に働く力は、地球の自転などによる見かけの力を除外して考えれば、地球による重力（万有引力） mg のみである。斜面から働く抗力 N と重力の y 成分とが（作用・反作用の法則に従い）釣り合い、合力としては、正味 x の負の方向を向いた $F_x = -mg \sin \theta$ となる。従って、自由落下と同様に、斜面下方に徐々に加速される。しかし、実質的な重力加速度は、自由落下の場合の mg に対して $\sin \theta$ だけ小さくなる。

従って、運動方程式は、因子 $\sin \theta$ 以外は、自由落下と全く同一になる。力 $\mathbf{F}$ は、座標軸の取り方が変わったので、それに応じて変わる： $\mathbf{F} = (-mg \sin \theta, N - mg \cos \theta = 0, 0)$ 。

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F} \quad (1)$$

両辺を質量 m で割って x, y, z 成分に分けると、

$$dv_x/dt = -g \sin \theta$$

$$dv_y/dt = 0 \quad (2)$$

$$dv_z/dt = 0$$

となり、両辺を時間で積分して、一般解が

$$v_x = -g \sin \theta \int dt = -gt \sin \theta + C_x$$

$$v_y = C_y \quad (3)$$

$$v_z = C_z \quad (C_i: \text{積分定数. } i = x, y, z)$$

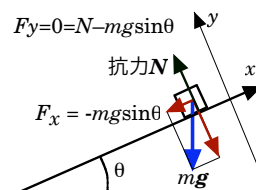
で与えられ、もう一度時間で積分すると、

$$x = -gt^2 \sin \theta / 2 + C_x t + C'_x$$

$$y = C_y t + C'_y \quad (5)$$

$$z = C_z t + C'_z \quad (C'_i: \text{積分定数. } i = x, y, z)$$

と一般解が求まる。一般解は、時刻 $t=0$ の時の初期位置や初速度等の「初期条件」（特解を与える）を任意定数として含むため、任意の初期条件を代入することにより、この運動のあらゆる場合を再現可能である。



摩擦がある時の斜面上の質点の運動

質点と斜面の間に摩擦力が働く場合を考えよう。摩擦力の大きさは、抗力 N の大きさに比例することが知られている。摩擦力の原因は、質点と斜面上の原子間、或いは分子間の引力または斥力である。表面が粗い場合には、凹凸同士が反撥し合うために加速が妨げられる。一方、原子の配列レベルまで滑らかである場合には、原子間の引力によって張り付いてしまい、外力が完全に打ち消される。摩擦の物理は、現在でも、原子間力顕微鏡（Atomic Force Microscope: AFM）のような微視的な測定手段により研究が続けられている。

摩擦力の原因から考えて、摩擦力が加速度を産み出すような事はあるが、外力を打ち消したり弱める効果がある。打ち消すことが出来る最大の摩擦力を、最大（静止）摩擦力 $f_{\max}$ と呼び、摩擦係数 μ と抗力 N により $f_{\max} = \mu N$ (μ は無次元量) と表される。従って、右図のような条件で、質点が斜面を滑り出すためには、 F_x が最大摩擦力 μN よりも大きくなる斜面の角度が必要になる。即ち、滑り出す条件は、

$$mg \sin \theta > \mu N$$

で与えられる。抗力 N は常に重力の斜面に垂直な成分と等しいので、

$$\sin \theta > \mu \cos \theta, \rightarrow \tan \theta > \mu$$

が質点が斜面上を滑り始める角度になる。斜面上の摩擦係数が場所によらず一定であれば、実質的な効果としては、斜面上の重力加速度を弱める因子 $\sin \theta$ に摩擦の因子が加わり、 $(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ の因子だけ重力加速度を弱める。なお、静止時に働く最大摩擦力と、滑り始めた後の摩擦力とは必ずしも同じ係数になるとは限らないことに注意しよう。

