

質点の運動

地上に於ける質点 m の運動を考えよう。 $t=0$ に初速ゼロで図1の原点にいる。まずニュートンの第2法則を使って運動方程式をたてる必要がある。

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{P}=m\mathbf{v}$ は運動量。最初に速度を考えよう。そうすると、第2法則の中の他の未知数は外力 $\mathbf{F}$ なので、地球の重力を代入する。この時に大事な点は、どのような座標系でこの運動を取り扱うのか、と言うことを明確に定義しておくことである。ここでは、図1のように、鉛直上方を y 軸にとる。力 $\mathbf{F}$ をベクトルのまま第2法則に代入すれば、重力加速度ベクトルを $\mathbf{g}=(0, 0, -g)$ として、

$$d\mathbf{P}/dt = m\mathbf{g}$$

或いは、

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{g} \quad (2)$$

が求める運動方程式になる。次に具体的に速度 $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 、位置座標 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ についてこの微分方程式を解く。そのためには更に具体的に、運動方程式を x 、 y 、 z -成分に分けて表しておくのが便利である。すなわち、

$$\begin{aligned} dv_x/dt &= 0 \\ dv_y/dt &= 0 \\ dv_z/dt &= -g \end{aligned} \quad (3)$$

を連立させて解く。と言っても、この問題は実質的に1次元運動であり、他の2つの方向の初速度=ゼロを考慮すれば、 z -成分のみを解けばよい。(3)の両辺を時間 t で不定積分して、一般解（積分定数を含み、どんな初期条件の場合の解も含む広い解）が

$$\begin{aligned} v_x &= dx/dt = C_x \\ v_y &= C_y \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_z = \int (dv_z/dt)dt = -g \int dt = -gt + C_z \quad (C_i: \text{積分定数}, i=x, y, z)$$

と得られる。 x, y 成分は重力の成分がゼロなので、積分定数のみ。

位置座標 $\mathbf{r}$ は、(4) 式を時間についてもう一度不定積分して、一般解が

$$\begin{aligned} x &= \int (dx/dt)dt = \int v_x dt = \int C_x dt = C_x t + C'_x \\ y &= \int v_y dt = C_y t + C'_y \end{aligned} \quad (5)$$

$$z = \int v_z dt = -g \int t dt = -gt^2/2 + C_z t + C'_z \quad (C'_i: \text{積分定数})$$

と求める。初速度 $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0 = 0$ から、 $C_x = C_y = C_z = 0$ なので、速度の特(殊)解が、

$$v_x = v_y = 0,$$

$$v_z = -gt$$

と求まり、位置座標は

$$x = C'_x$$

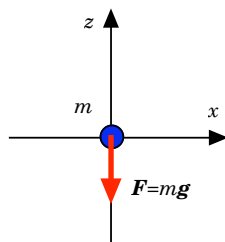


図1：質量 m の質点に地球の重力 $m\mathbf{g}$ が働いている。 $t=0$ に初速ゼロで原点にいる。

$$y = C'_y \quad (6)$$

$$z = -gt^2/2 + C'_z$$

で、 $t=0$ で $\mathbf{r}=0$ の初期条件を代入して、 $C'_x = C'_y = C'_z = 0$ から位置座標の特解が

$$x = 0$$

$$y = 0 \quad (7)$$

$$z = -gt^2/2$$

と定まる。

投げ上げの例

次に図2の、水平面に対して角度 θ で投げ上げる例を考えよう。前の例と違う点は、初速度がゼロでない点のみである。従って、初期条件を代入して特解を求める前の解、(4)、(5)が、そのままこの例でも使える：

$$\begin{aligned} v_x &= C_x \\ v_y &= C_y \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_z = \int dv_z = -g \int dt = -gt + C_z \quad (C_i: \text{積分定数}, i=x, y, z)$$

及び、

$$\begin{aligned} x &= C_x t + C'_x \\ y &= C_y t + C'_y \end{aligned} \quad (5)$$

$$z = -gt^2/2 + C_z t + C'_z \quad (C'_i: \text{積分定数})$$

そこで、順番に初期条件を代入して図2の場合の特解を求めよう。

$t=0$ で $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta, 0, v_0 \sin\theta)$ なので、速度の特解は、

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta$$

となる。同様に、位置座標は $t=0$ で $\mathbf{r}=0$ なので、 $C'_x = C'_y = C'_z = 0$ から

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\theta + C'_x = v_0 t \cos\theta \\ y &= C'_y = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$z = -gt^2/2 + v_0 t \sin\theta + C'_z = -gt^2/2 + v_0 t \sin\theta$$

と決まる。

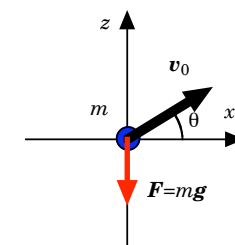


図2：質量 m の質点に地球の重力 $m\mathbf{g}$ が働いている。 $t=0$ に初速 $\mathbf{v}(t=0)=\mathbf{v}_0$ で原点にいる。

x と y の関係

次に、ある時刻 t の時の x と z の関係を、時刻 t を消去して調べよう。(9)-1 から

$$t = x / v_0 \cos \theta$$

なので、(9)-3 の z に代入して、

$$z = -gx^2 / 2v_0^2 \cos^2 \theta + x \cdot \tan \theta \quad (10)$$

の x の 2 次関数の関係、放物線運動が得られる。

この式から、空気抵抗がない時に、 θ を何度にすると最も遠方まで飛ぶかを確かめることが出来る。地面に落下したときに $z = 0$ なので、 x について整理すると、

$$x = 2v_0^2 \cdot \cos \theta \sin \theta / g = (v_0^2 / g) \sin 2\theta$$

なので、 $\sin 2\theta$ が最大になる $\theta = \pi/4$ の時に最も遠方の v_0^2/g まで飛ぶ。面白いことに、この距離は、真上に初速 v_0 で投げ上げたときの高さ $v_0^2/2g$ の、丁度 2 倍になっている。

水平方向の飛距離が $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の積に比例するのは何故だろうか？飛距離を稼ぐには、飛行時間が長い方がよい。これは、 $2v_0 \sin \theta / g$ で与えられる。これに水平方向の速度 $v_0 \cos \theta$ を掛け合わせて $(v_0^2/g) \sin 2\theta$ で与えられる、という訳である。

問 1 良く知られているように、最も遠くまで投げるには、45度の角度で投げるのが良い。さて、実際には、空気抵抗がある。この場合は、最長飛距離を出すには、角度を増せばよいか？それとも小さくすべきだろうか？

問 2 ボールの遠投をする時に、100 m 先まで投げるのに必要な初速度を求めよ。水平面に対する角度を、45度と θ_0 度の 2 つの場合を計算せよ。 θ_0 は、自分の誕生月に 0 を付けた角度とする（例：3月は、30度。9月以降は80度を引く：12月は、120 - 80 = 40度）。