

回転運動の方程式とベクトル表示

ニュートンの運動方程式は、

$$m\mathbf{dv}/dt = \mathbf{F}$$

で表される。回転運動をする時には、外力 $\mathbf{F}$ 以外に、常に向心力 $\mathbf{F}_{\text{向}}(t)$ が働くので、ニュートンの運動方程式は、

$$m\mathbf{dv}/dt = \mathbf{F}_{\text{向}}(t) + \mathbf{F} \quad (1)$$

となる。簡単のために x - y 面内の回転に限定して成分で表示すると、

$$m\mathbf{dv}_x/dt = -\mathbf{F}_{\text{向}} \cos \omega t + F_x$$

$$m\mathbf{dv}_y/dt = -\mathbf{F}_{\text{向}} \sin \omega t + F_y$$

と表せる。この連立方程式は、右辺に非線形の三角関数（時間 t の無限乗の冪乗が含まれる）があるので、通常は解析的には解く事が出来ない。

そこで、非線形関数の $\mathbf{F}_{\text{向}}(t)$ を運動方程式から消去できれば、回転運動の解析的理解を容易にする「回転の運動方程式」が得られる。

(1)式の両辺に $\mathbf{F}_{\text{向}}(t)$ と常に平行な「回転中心から質点までの位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ 」の外積を掛け、外積の定義 ($|\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{向}}| = rF_{\text{向}} \sin \theta = 0$ 、 $\because \theta = 0 \text{ or } \pi$) より運動方程式から $\mathbf{F}_{\text{向}}(t)$ を消去できる：

$$m \mathbf{r} \times \mathbf{dv}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{向}}(t) + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2)$$

ここで、角運動量 $\mathbf{L}$ と力のモーメント $\mathbf{N}$ は以下の様に定義される。

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

新たに定義された物理量 $\mathbf{L}$ と $\mathbf{N}$ を用いると、非常に単純な形の「回転の運動方程式」

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N} \quad (\because d\mathbf{L}/dt = m d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/dt = m d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt)$$

が得られる。ここで、 $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ なので $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{v} = 0$ に注意。

この単純な回転の運動方程式の形はベクトルの外積という表現のお陰である。たとえ向心力を運動方程式から消去できても外積の表現なしでは以下の複雑な連立方程式となり、コンピューターを用いる以外に回転運動の解析は困難となる。

$$m \frac{d(yv_z - zv_y)}{dt} = yF_z - zF_y$$

$$m \frac{d(zv_x - xv_z)}{dt} = zF_x - xF_z$$

$$m \frac{d(xv_y - yv_x)}{dt} = xF_y - yF_x$$

回転運動の直感的な理解はベクトルの外積表示なくしてはほとんど不可能であり、ベクトルによる表記が、単に複数成分を1つの記号で表現出来る事以上に、本質的な重要性を持つ事を理解したい。