力学で使う微分方程式

（１） $\frac{d^2x}{dt^2}+f(t)=0$

**直接積分**が可能（不定積分の例：自由落下　$\frac{d^2x}{dt^2}=-g$ ）

$\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt=\int\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)=\int dv=v=-\int f(t)dt$、（例： $v=\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt=-\int g dt=-gt+v_0$）

$\int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int dx=x=-\int dt\int_0^t f(t')dt'$.　（例： $x=\int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int(-gt+v_0)dt=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+x_0$）

（２） $\frac{dx}{dt}+cx=0$　　($c$=const.)

いきなり時間 $t$ で積分は出来ない。何故なら $x(t)$ を求めたいのであって、その関数形はこの方程式を解くまでは未知の関数であるから。

**変数分離**が可能（例：摩擦のある自由落下の速度　$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v-g=-\frac{k}{m}(v+\frac{mg}{k})$）

変数 $x$ を左辺にまとめ、$dt$ を右辺に移動。両辺をそれぞれ $x, t$ で積分すると、

$\int\frac{dx}{x}=-c\int dt$、　（例：$v$ を含む括弧を左辺に移動して、$\int\frac{dv}{v+\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}\int dt$）

$\ln|x|=-ct+C$、　（例： $\ln|v+\frac{mg}{k}|=-\frac{k}{m}t+C$）

$x=\exp(-ct+C)=Ae^{-ct}$、　（例：$v+\frac{mg}{k}=\exp\{-\frac{k}{m}t+C\}=A\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$、$\therefore v=A\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$.
（$A=\mathrm{e}^C$））

（３） $\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$　斉次２階線形微分方程式　($k$=const.)

直接積分は出来ない（例：単振動　$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0{}^2x$ ）

$x=e^{\lambda t}$ とおいて**特性方程式**を作り、特解を求める．これは、２回微分して元の関数に比例するのは指数関数しかあり得ないためである．

$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}=-\omega_0{}^2x=-\omega_0{}^2e^{\lambda t}$ において $e^{\lambda t}>0$ より、$\lambda^2=-\omega_0{}^2$, $\therefore\lambda=\pm i\omega_0$ が得られ、２つの特解、$x_1=e^{i\omega_0t}$, $x_2=e^{-i\omega_0t}$ が求まる．これらの線形結合から一般解

$x(t)=Ae^{i\omega_0t}+Be^{-i\omega_0t}$

が決定される．これに初期条件を入れて、特定の初期条件の時の解が求められる．

（４） $\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=0$　　($k$=const.)

（３）と同じ方法で解く（例：摩擦のある単振動）

（５） $\frac{d^2x}{dt^2}+kx=g(t)$　非斉次２階線形微分方程式　($k$=const.)

直接積分は出来ない（例：単振子の強制振動　$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=\frac{F}{m}\cos\omega t$）

**定数変化法**で解く．その結果によるとこの方程式の解は、$g(x)=0$ と置いた同次２階微分方程式（３）の一般解に、この微分方程式の１つの特解を加えることにより得られることが知られている．

この例は、振子やバネを周期的に揺すってやる運動に相当し、強制振動と呼ばれる．従って、その特解としては、揺すった振動数の振動が起こると予想されるので、

$x=x_0\cos\omega t$

と置いて、微分方程式を満たす $x_0$ の条件を求める．そうすると、

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ なので、$x(\omega_0^2-\omega^2)=\frac{F}{m}\cos\omega t=\frac{F}{m}\frac{x}{x_0}$

が得られる．従って、$x_0=\frac{F/m}{(\omega_0^2-\omega^2)}$ から、強制振動の一般解は

$x(t)=Ae^{i\omega_0t}+Be^{-i\omega_0t}+\frac{F/m}{(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$

と求められる．

これに、更に摩擦を加えた例が、物理学（原康夫著：学術図書出版社）の２９頁に載っているので参照のこと．