粘性抵抗と慣性抵抗

地上で観測される色々な現象，例えば降雨やパラシュートによる安全な降下などを半定量的に理解するために、空気，即ち流体の抵抗を考える必要がある。そこで，ここでは空気抵抗の２つの原因を考察して、ニュートン力学が現実の世界を説明出来ている事を確認しよう。

粘性抵抗

摩擦のない完全流体を除くと、流速の分布に伴う粘性抵抗が働き、粘性力は速さ v の勾配に比例する。

図１のように、粘性を持つ川の水の流れを考えよう．経験的に、流体と固体（川岸）の接する面では流速が０となり、川の中央ほど速くなることが知られている．そのため、$\mathrm{d}y$ だけ離れた流線間の速さに $\mathrm{d}v=v(y+\mathrm{d}y)-v(y)$ の差が生ずる。水分子間の衝突による粘性 (摩擦) の大きさは、$\mathrm{d}y$ に対する流線間の速度差 $\mathrm{d}v$ の比 (速度勾配)

$$\frac{dv}{dy}=\lim_{dy\to 0}\frac{v(y+dy)-v(y)}{dy}$$

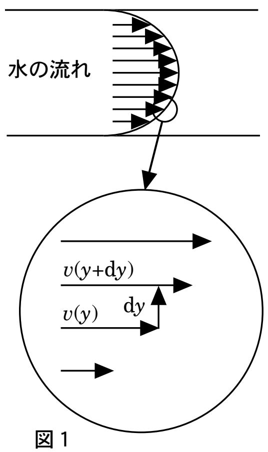


図１

が大きいほど増大すると考えられる。川岸では常に速度が０なので、川幅が一定だとすると、速度勾配も中央の速度 v に比例する。粘性抵抗 Fと速度勾配の比例係数を粘性係数 η と定義すると、流線間の接触単位面積あたりの粘性応力 τ は

$$\tau=F/S=\eta\frac{dv}{dy} \qquad (1)$$

と書き表せる．粘性係数の単位は、(1) 式から、

$$[\eta]=\left[\tau/\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right]=\left[\frac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{s^{-1}}}\right]=[\mathrm{Pa\bullet s}]$$

で与えられる．ここで、$\mathrm{Pa = N/m^2}$ は圧力の単位で、10^3 hPa = 10^5 Pa が約１気圧に相当する．

一様な流速 v 中に置かれた半径 a の球の粘性抵抗は、近似的に、球と流体が接する面積 S に粘性応力 τ を掛けて得られる：

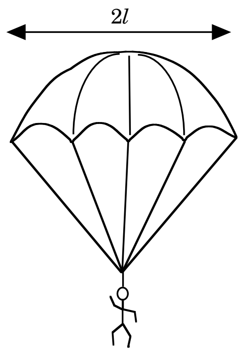


図２　ρ≈1.3 kg/m^3

$$F=S\eta\frac{dv}{dy}\approx 4\pi a^2\eta\frac{v}{a}=4\pi a\eta v = cv、 \qquad (2)$$

(c=4πaη, 正確には$6\pi a\eta v$)。ここで、球の表面の流速 v=0 が、球から半径 a 程度離れれば流れの速度 v になると仮定し、球の表面の速度勾配を $(v-0)/a$ で近似した。この場合、粘性抵抗は速さ v に比例し、20度C，1気圧の空気の粘性係数は約 1.8×10^{-5} [Pa•s]、水は約 0.8×10^{-3} [Pa•s] である。

慣性抵抗

速度が遅い場合には、速度に比例する粘性抵抗が効くが、ある程度速くなると（形状に

依存）速度の２乗に比例する慣性抵抗が主になる．図２に示す速度 v で落下する半径 l のパラシュートを考えよう．このパラシュートが落下するにつれて、その下方の断面積 S $(=\pi l^2)$ の空気が排除される．これを、断面積 S の空気を下方に速度 v に加速すると理解出来る．即ち、単位時間の間に加速する空気の体積 $\Delta V/\Delta t$ は Sv [m^3/s]、その質量 ΔM は空気の密度を ρ として $\Delta M/\Delta t=\rho Sv$ [kg/s] となる．結果として、空気は $\mathrm{d}t$ 時間当たり $dM=\rho Sv\bullet dt$ と v を掛けた運動量 $\mathrm{d}P=dMv=\rho Sv^2\bullet dt$ を得る。結局、運動方程式 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=F$ より、パラシュートの受ける慣性抵抗の大きさは $F=\rho Sv^2=Dv^2$ $(D=\rho S)$ になる．方向は、摩擦なので常に $-\boldsymbol{v}$ の方向。この表式は近似式なので、正確にはこれに、形状に依存した１程度の係数がかかる．

粘性抵抗があるときの運動

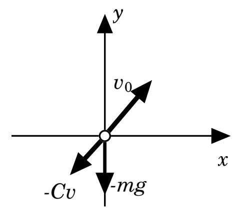


図３　粘性抵抗が働く時の質点の運動

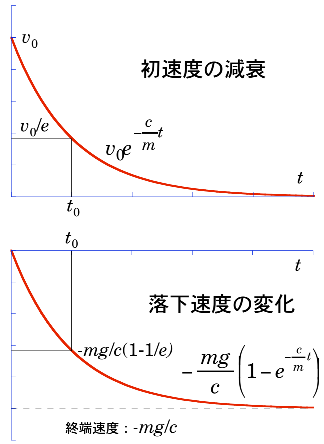
速度に比例する粘性抵抗があるときには、運動方程式は速度に比例する減衰項を含み

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-cv_x,\quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{m}v_x,$$
$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-mg-cv_y,\quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{m}\left(v_y+\frac{m}{c}g\right), \qquad (3)$$

と書ける．$t_0 = m/c$ [Kg•m/Ns=s] は、重力による加速と摩擦による減速の比率で決まる時定数（速度が $1/e$ に減速されるに要する特性時間）である．両式を時間で積分して、

$$\int\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=-\frac{c}{m}\int\mathrm{d}t,\quad \ln|v_x|=-\frac{c}{m}t+C_x,\quad v_x=Ae^{-\frac{c}{m}t}=Ae^{-\frac{t}{t_0}},\ (A=e^{C_x})$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y+\frac{mg}{c}}=-\frac{c}{m}\int\mathrm{d}t,\quad \ln\left|v_y+\frac{mg}{c}\right|=-\frac{c}{m}t+C_y,\quad v_y=Be^{-\frac{c}{m}t}-\frac{mg}{c}=Be^{-\frac{t}{t_0}}-\frac{mg}{c},\ (B=e^{C_y})$$



が得られる．ここで、初期条件、$t = 0$ で $v = v_0$ を代入すると積分定数が $A=v_{0x}, B=v_{0y}+mg/c$ と決まり、

$$v_x=v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}=v_{0x}e^{-\frac{t}{t_0}},$$
$$v_y=\left(v_{0y}+\frac{mg}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t}-\frac{mg}{c}=v_{0y}e^{-\frac{c}{m}t}-\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

となる．これらの結果から、初速度は時定数 t_0 で減衰し、落下速度は同じ時定数で終端速度に漸近する。

時刻 t における質点の位置は、速度をもう一度時間で積分して、

$$x=\int dx=v_{0x}\int e^{-\frac{c}{m}t}dt=-\frac{mv_{0x}}{c}e^{-\frac{c}{m}t}+C_{x1}, \qquad (5)$$

$$y=\int dy = v_{0y}\int e^{-\frac{c}{m}t}dt-\frac{mg}{c}\int\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)dt$$

$$=-\frac{mv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t}-\frac{mg}{c}\left(t+\frac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}\right)+C_{y1},$$

が得られる．初期条件、t=0 で x=y=0 を代入し、 $C_{x1}=mv_{0x}/c$, $C_{y1}=mv_{0y}/c+m^2g/c^2$ から、

$$x=\frac{mv_{0x}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

$$y=\frac{mv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)-\frac{mg}{c}\left(t-\frac{m}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)\right), \qquad (6)$$

となる．y の第１項は、初速度による到達距離、第２項は、摩擦のある時の自由落下距離である。

慣性抵抗

速度の２乗に比例する慣性抵抗がある場合の質点の運動方程式は、

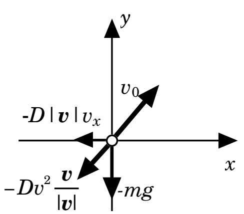
$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\left(-Dv^2\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)_x=-D|\boldsymbol{v}|v_x,\quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}|\boldsymbol{v}|v_x=-\frac{D}{m}v_x\sqrt{v_x^2+v_y^2},$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-mg+\left(-Dv^2\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)_y=-mg-D|\boldsymbol{v}|v_y,\quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}\left(|\boldsymbol{v}|v_y+\frac{m}{D}g\right), \qquad (7)$$

と書ける．(7) の両式は、v_x, v_y の両成分を含む連立微分方程式になる．ここでは、簡単のために (1) $v=v_x$（摩擦のある慣性運動、常に $v>0$）或いは (2) $v=v_y$（摩擦のある自由落下、常に $v<0$）の場合の２通りを考えよう．

$$⑴\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-Dv^2,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}v^2,$$

$$⑵\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg+Dv^2,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}\left(\frac{m}{D}g-v^2\right), \qquad (8)$$



を時間で積分して、

$$(1)\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{D}{m}\int\mathrm{d}t,\quad \frac{1}{v}=\frac{D}{m}t+C_1,\quad v=\frac{m}{D}\frac{1}{t+mC_1/D},$$

$$(2)\ \int\frac{\mathrm{d}v}{\left(\frac{m}{D}g-v^2\right)}=-\frac{D}{m}\int\mathrm{d}t,\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{mg}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{mg/D}-v}+\frac{1}{\sqrt{mg/D}+v}\right)\mathrm{d}v \qquad (9a)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{mg}}\left(-\ln\left|\sqrt{mg/D}-v\right|+\ln\left|\sqrt{mg/D}+v\right|\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{mg}}\ln\left|\frac{\sqrt{mg/D}+v}{\sqrt{mg/D}-v}\right|=-\frac{D}{m}t+C_2$$

が得られる．(2) の場合は常に $v<0$ で、$v^2\le\frac{mg}{D}$（終端速度の２乗）が成立ち、

$$\frac{\sqrt{mg/D}+v}{\sqrt{mg/D}-v}=A\exp\left\{-2\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\right\},\quad \sqrt{\frac{mg}{D}}+v=\left(\sqrt{\frac{mg}{D}}-v\right)A\exp\left\{-2\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\right\},$$

$$v=-\sqrt{\frac{mg}{D}}\frac{1-A\exp\left\{-2\sqrt{Dg/m}\,t\right\}}{1+A\exp\left\{-2\sqrt{Dg/m}\,t\right\}},\quad \left(A=\exp\left(2\sqrt{\frac{mg}{D}}C_2\right)\right) \qquad (9b)$$

となる．初期条件、t=0 で (1) の場合は、$v=v_0$, (2) の場合は、v=0 を代入して得た $C_1=1/v_0$, A=1 を代入し、

$$⑴\ v=\frac{m}{D}\frac{1}{t+m/Dv_0},$$

$$⑵\ v=-\sqrt{\frac{mg}{D}}\frac{1-\exp\left\{-2\sqrt{Dg/m}\,t\right\}}{1+\exp\left\{-2\sqrt{Dg/m}\,t\right\}}=-\sqrt{\frac{mg}{D}}\tanh\left\{\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\right\} \qquad (10)$$

を得る．また、 (2) の場合の v の終端速度は$-\sqrt{mg/D}$ で与えられ、(8) 式の (2) で $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ と置いて得られる結果と等しいことが確認できる．この場合の特性時間は$t_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{Dg}}$ [秒]である．この時間の数倍でほぼ終端速度になると考えて良い．

さて、到達距離 y は、(10) 式を更に時間で積分して、

$$⑴\ y=\int\mathrm{d}y=\frac{m}{D}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+m/Dv_0}=\frac{m}{D}\ln\left|A\left(t+m/Dv_0\right)\right|,$$

$$⑵\ y=\int\mathrm{d}y=-\sqrt{\frac{mg}{D}}\int\tanh\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\,\mathrm{d}t=-\frac{m}{D}\ln\left\{B\coth\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\right\}, \qquad (11)$$

が得られる．ここで、$\ln A$、$\ln B$ は積分定数．ここで、初期条件、t=0 で (1) y=0, (2) $y=h_0$ を代入して得た $A=Dv_0/m$，$B=\exp(-Dh_0/m)$ を代入し、

$$⑴\ y=\frac{m}{D}\ln\left|\frac{Dv_0}{m}t+1\right|,$$

$$⑵\ y=h_0-\frac{m}{D}\ln\left\{\coth\sqrt{\frac{Dg}{m}}t\right\} \qquad (12)$$

$$=h_0-v_ft-\frac{v_f^2}{g}\ln\frac{1+\exp\left(-2gt/v_f\right)}{2},\quad \left(v_f=\sqrt{\frac{mg}{D}}\right)(a)$$

を得る．面白いことに、速度に比例する粘性抵抗の場合には、 x 成分は有限の距離までしか飛ばないが、速度の２乗に比例する慣性抵抗の (1) 場合には、速度が小さいところで限りなくゆっくり減衰するため、極限値がないが、実際には粘性抵抗の寄与が効いてくる．

また、(2) 場合には、(a) から分かるように、$t\to\infty$ の極限では$y\cong h_0-v_ft+\frac{v_f^2}{g}\ln 2$となるので、$-v_ft$ に比例して降下する．