ベクトル

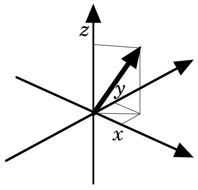
大きさと方向を持つ量（少なくとも２つ以上の成分を持つ量）

表記例（位置座標）

直交座標：$(x,\ y,\ z)$，**極座標**：$(r,\ \theta,\ \varphi)$，**記号**：$\boldsymbol{V},\ \vec{V},\ \tilde{V}$

ベクトルの基準点は任意の位置に置いて良い．

単位ベクトル：長さが１のベクトル。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 等と表す。



直交座標
(Cartesian

ベクトルの種類

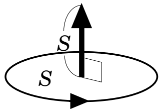
極性ベクトルと軸性ベクトル

本来方向を持つ量を表すベクトルを**極性ベクトル**と呼ぶ

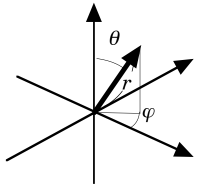
例）変位ベクトル、速度ベクトル、力ベクトル

本来方向はないが、適当な約束でその方向を定めたベクトルを**軸性ベクトル**と呼ぶ

例）面積ベクトル、角速度ベクトル



面積ベクトル



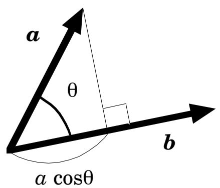
極座標
(Polar

ベクトルの和と差

$\boldsymbol{a}=(a_x\,\boldsymbol{i}+a_y\,\boldsymbol{j}+a_z\,\boldsymbol{k})$、$\boldsymbol{b}=(b_x\,\boldsymbol{i}+b_y\,\boldsymbol{j}+b_z\,\boldsymbol{k})$

和、差

$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$



ベクトルのかけ算

内積（スカラー積、積はベクトルではない）

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=ab\cos\theta$,

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を直交座標の x, y, z 各軸の３つの単位ベクトルとすると、互いに直交するので、

$\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{i}=0$

となる．従って、

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

が得られる．

ベクトルの長さ：$a=\sqrt{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

外積（ベクトル積、積はベクトル）

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin\theta$, **方向は右図の通り．**

従って、平行なベクトルの外積はゼロになる．

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$,

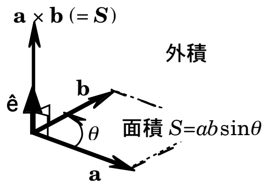
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$

が成り立つ．従って、

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$

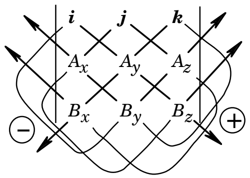
が得られる．



$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$（小角の方）、右ネジを回す方向に取る．$\hat{e}$ は$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$方向の単位ベクトル

外積の別の表記

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$



外積の応用例

外積を用いて三角関数の加法定理を求める．

$\boldsymbol{a}=a(\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha)$、$\boldsymbol{b}=b(\boldsymbol{i}\cos\beta-\boldsymbol{j}\sin\beta)$ とすると、

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=ab\,(\boldsymbol{i}\cos\beta-\boldsymbol{j}\sin\beta)\times(\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha)$

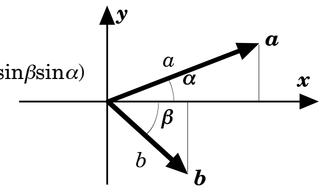
$\quad=ab(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}\cos\beta\cos\alpha+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\cos\beta\sin\alpha-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}\sin\beta\cos\alpha-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\sin\beta\sin\alpha)$

$\quad=ab(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\boldsymbol{k}$

外積の定義から、$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}ab\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

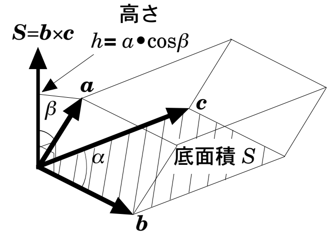
が得られる．



スカラー三重積

$\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{S}=Sa\cos\beta=V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{abc}]$,

ここで、$a\cos\beta$ は**ベクトル** $\boldsymbol{abc}$ で作る平行６面体のbc で張る底面から測った高さ h に等しい．$[\boldsymbol{abc}]$ は、グラスマンの記号と呼ばれ、$\boldsymbol{abc}$ を $\boldsymbol{cab}$、$\boldsymbol{bca}$ と順番に入れ替えても結果は変わらない事を意味する．しかし、交換するとマイナスがつく．



$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は並行６面体の底面積に等しく底面に垂直で、$\boldsymbol{a}$との内積を取ると$[\boldsymbol{abc}]=hS=V$ と体積を与える．

ベクトル三重積

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{a})$

ベクトルの微分

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$$

ベクトルの微分の成分は、成分の微分．円運動の場合は、半径の長さr は一定なのでその２乗（内積、$\boldsymbol{r}\bullet\boldsymbol{r}=C$）も一定．それを時間で微分すると、

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\bullet\boldsymbol{r})=\frac{dC}{dt}=0,\ \therefore\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\bullet\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\bullet\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\boldsymbol{r}\bullet\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\boldsymbol{r}\bullet\boldsymbol{v}=0,\ \therefore\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$$

が得られ、半径ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることが分かる．等速円運動の場合は速さv も一定なので、全く同様に $\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{a}=0$ が得られ、速度と加速度が直交していることが示される．

ベクトルの積分

１）スカラー変数による積分：

例：移動量（ベクトル量）

$\int \boldsymbol{v}dt = \left(\int v_x dt,\ \int v_y dt,\ \int v_z dt\right)$

２）内積の積分（接線線積分）

例：仕事量（スカラー量．）

点AからBまでの接線線積分

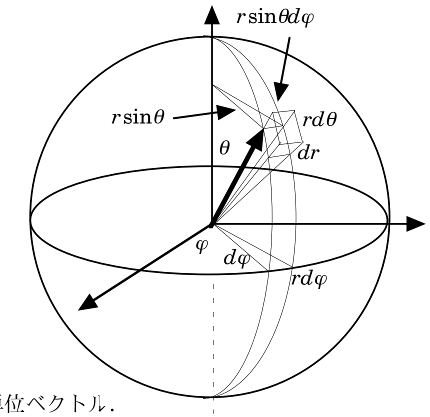
$\int_{AB} \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r} = \int_{AB} F_x dx + \int_{AB} F_y dy + \int_{AB} F_z dz$

３）面 積分（スカラー量）

面Sの上の面積分

$\int_S \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\bullet \boldsymbol{n} dS$

$\boldsymbol{S}$ は面積ベクトル、$\boldsymbol{n}$ は面の法線（面積）単位ベクトル．



４）体 積分（スカラー量）

$\int \varphi d\boldsymbol{r} = \int \varphi dV = \iiint \varphi dxdydz = \iiint \varphi r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$

体積要素： $dV = dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$

＊ガウスの発散定理：$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} dv = \int_S \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}$　（体積分 => 面積分）

＊ストークスの定理：$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{s}$　（面積分 => 線積分）

問

１）スカラー三重積とベクトル三重積の成分を書き下し、ベクトル三重積の(A)式を確認せよ．

２）$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　をベクトルを使って証明せよ．

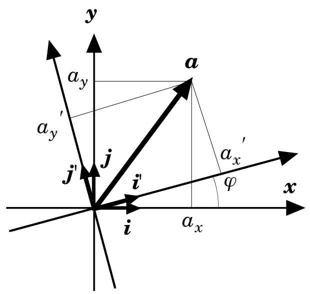
座標の回転

$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = a_{x'}\boldsymbol{i}' + a_{y'}\boldsymbol{j}'$ に $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ のスカラー積をとると

$a_x = a_{x'}\boldsymbol{i}'\bullet\boldsymbol{i} + a_{y'}\boldsymbol{j}'\bullet\boldsymbol{i} = a_{x'}\cos\varphi - a_{y'}\sin\varphi$

$a_y = a_{x'}\boldsymbol{i}'\bullet\boldsymbol{j} + a_{y'}\boldsymbol{j}'\bullet\boldsymbol{j} = a_{x'}\sin\varphi + a_{y'}\cos\varphi$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix}$$



$\boldsymbol{i}'\bullet\boldsymbol{i} = \cos\varphi,\ \boldsymbol{j}'\bullet\boldsymbol{j} = \cos\varphi$

$\boldsymbol{j}'\bullet\boldsymbol{i} = \cos(\varphi+\pi/2) = -\sin\varphi$

$\boldsymbol{i}'\bullet\boldsymbol{j} = \cos(\varphi-\pi/2) = \sin\varphi$

ハミルトンの演算子・ナブラ ∇

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

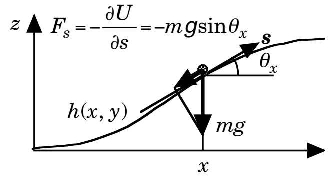
勾配 (Gradient)

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\nabla_x\varphi,\ \nabla_y\varphi,\ \nabla_z\varphi)$$

例）保存力

U を重力や電場などのスカラーポテンシャルエネルギーとすると、働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x},\ -\frac{\partial U}{\partial y},\ -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = (F_x,\ F_y,\ F_z)$$



で与えられる．例）$z=h(x, y)$ 、$U=mgz$ とすると、

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(x,y) = -mg\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial h}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial h}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

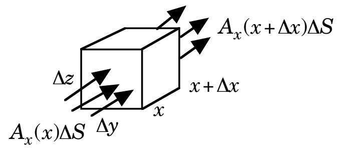
$$= -mg\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial h}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial h}{\partial y}\right) = -mg\left(\boldsymbol{i}\tan\theta_x + \boldsymbol{j}\tan\theta_y\right)$$

任意の方向 $\boldsymbol{s}$（単位ベクトル）の力の成分は力との内積を取って、

$F_s = -\boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{F} = -mg\left(\boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{i}\tan\theta_x + \boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{j}\tan\theta_y\right)$

で得られる．右図の様に x-z 面内で $\boldsymbol{s}$ が $h(x, y)$ の接線になっている場合は $\boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{i} = \cos\theta_x$ 、$\boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{j} = 0$ なので（一般的には方向余弦になる）、$F_s = -mg\sin\theta_x$ が得られる．これは、直接求めた $F_s = -\frac{\partial U}{\partial s} = -mg\sin\theta_x$ に等しい．

ベクトルの方向微係数・発散 (Divergence)



$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\bullet\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

発散の意味は、微少体積 ($\Delta x, \Delta y$, Δz) から出てくる湧き出しを表す．

$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A_x(x+\Delta x) - A_x(x)}{\Delta V}\Delta S_x = \frac{\partial A_x}{\partial V}\Delta S_x$ と書くと、$A_x(x+\Delta x)\Delta S_x$ が $x+\Delta x$ の位置の微少面積 $\Delta S_x = \Delta y\Delta z$ から出ていく量で、x の位置の微少面積 ΔS_x から入る $A_x(x)\Delta S_x$ を引き、体積 ΔV で割っているので、ゼロにならない分が単位体積から湧き出す量になる．他の成分も同様に理解できる．ガウスの**法則**（電荷から出る電気力線）の場合は、湧き出し $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ が電荷密度 ρ/ε_0 に等しくなる。ガウスの**法則**の積分形とはガウスの**定理**、

$\int \mathrm{div}\boldsymbol{E} dV = \int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S}$ で結ばれる。

gradient の発散

$$\mathrm{div}\nabla\varphi = \nabla\bullet\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

、（ϕ としては、重力の U、電位の $V = \int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r}$）

ナブラの発散 $\nabla^2 = \Delta$ は、ラプラス演算子、ラプラッシアンと呼ばれる．

（参考）ラプラス方程式：$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = 0$、ポアッソン方程式：$\nabla^2\varphi = \rho$（$\rho$ は電荷密度）

ベクトルの回転 (Rotation, Curl)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

また、$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ の時、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャルと呼ぶ．（スカラーポテンシャルと比較）

09.4.21