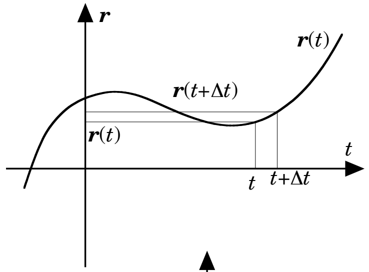
速度・加速度



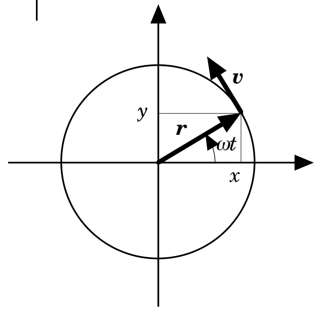
一般的に、位置座標 $\boldsymbol{r}(t)$ は時間 t の関数として連続的に変化するので、ある時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ や加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を考えるためには、時刻 t の微係数として速度・加速度を定義する必要がある．

速度：

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

加速度：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)$$



円運動の例：２次元極座標表示

半径 r の円周上を等速で運動する場合：位置ベクトルの長さ r 及び角速度 ω は時間的に変化しないため、

$\boldsymbol{r}(t)=(x,y)=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)=r\,(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$,

$\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=r\omega\left(-\sin\omega t,\ \cos\omega t\right)$,

$\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2r\left(\cos\omega t,\ \sin\omega t\right)=-\omega^2\boldsymbol{r}\ (=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 向心力に相当).

これより、加速度ベクトルは位置ベクトルと平行で逆向きだと分かる．**角速度ベクトル** ω は**軸性ベクトル**で、大きさは ω、方向は回転軸に平行で右ネジの進む方向に取る．

速度ベクトルは、位置ベクトル、加速度ベクトルとのそれぞれの内積

$$\boldsymbol{v}(t)\bullet\boldsymbol{r}(t)=r^2\omega\left(-\sin\omega t,\ \cos\omega t\right)\left(\cos\omega t,\ \sin\omega t\right)=r^2\omega\left(-\cos\omega t\sin\omega t+\cos\omega t\sin\omega t\right)=0$$

$$\boldsymbol{v}(t)\bullet\boldsymbol{a}(t)=-r^2\omega^3\left(-\sin\omega t,\ \cos\omega t\right)\left(\cos\omega t,\ \sin\omega t\right)=-r^2\omega^3\left(-\cos\omega t\sin\omega t+\cos\omega t\sin\omega t\right)=0$$

がゼロになることから、互いに直交していることが確認できる．

ニュートンの運動法則

ガリレオ、ケプラー、ホイヘンスらの業績の積み重ねの上に、ニュートンが見出した慣性系における運動法則は次の３法則に表現される．

第一法則（慣性の法則）

外的な力が加わらない限り、物体は静止或いは等速直線運動を続ける．

第二法則（運動法則）

物体の加速度は、加えた力に比例し、その質量に反比例する．

第三法則（作用・反作用の法則）

２物体が互いに力を及ぼし合うときには、同一直線上で互いに逆向き・同一の大きさの力が働く．

これらの三法則は、次の運動方程式に要約される．

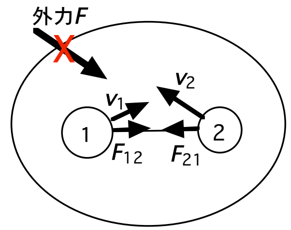
$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m},\ m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}、\quad (16)$$

ここで、$\boldsymbol{a}$ は加速度 [m/s^2]、$\boldsymbol{F}$ は力 [N=kg•m/s^2]、m は慣性質量 [kg]、 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ は運動量 [kg•m/s] と呼ばれる．第一法則のように、外力が加わらない場合は、

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0,\ \int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}=\mathrm{const.}$$

となり、第一法則：外力がないときには速度はゼロまたは一定値を取る、を再現する．しかし、従来の常識であった、力が働いていないと運動が保たれない、ことが正しくないことを明確に示すと同時に、運動の本性の重要な性質であることを考えると、第一の法則としての重要性が認められる．

運動量保存則



２つの物体が、衝突して、限られた時間Δt だけ互いに力を及ぼし合う以外に、外的な力が加わらない場合を考えよう．２物体の間には、互いの衝突によって及ぼし合う $\boldsymbol{F}_{12}$（１から２に及ぼす力）、$\boldsymbol{F}_{21}$（２から１に及ぼす力）（内力）以外の、外部から働く力（外力）が働かないとしよう．衝突前後のそれぞれの物体の運動量を $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、および $\boldsymbol{P}'_1$、$\boldsymbol{P}'_2$ とすると、衝突の前後で外力が働かない時には、全運動量$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ は第三法則（作用反作用、常に $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$が成り立ち、衝突している間だけゼロでなくなる）を使い、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=0,\ \therefore\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}'_1+\boldsymbol{P}'_2=\mathrm{const.}\quad(17)$$

と書ける．この関係は、粒子数がもっと多くても、外力が働かない限り運動方程式 (1) 式と作用反作用の法則により成り立つことが保証され、運動量保存則と呼ばれる．とても有用な法則であることは、ジャンボジェット機が空に浮く理由やジェットエンジンで加速できる理由が説明できることからも分かる．