マクローリン展開と近似式（09.4.28）

変数 x に関して何度でも微分可能な関数（無限回微分可能関数と呼ぶ） $f(x)$ が、以下のような級数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (1)$$

で表されるとする．ただし、a_0、a_1、$\cdots$ は定数である．この級数をn 回微分すると、

$$f^{(n)}(x)=a_n n!+\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k\text{、ここで}x=0\text{ と置くと }f^{(n)}(0)=a_n n!,\ \therefore\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (2)$$

となる．ここで、 $f^{(n)}(0)$は、$f(x)$ をx でn 回微分し、x=0 と置くことを意味する．(2) 式を(1) 式に代入すると、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (3)$$

という無限級数で表すことが出来る．これを、関数 $f(x)$ のマクローリン展開と言う．

テイラー展開

$f(x)$ を、$(x-a)^n$ で展開した、$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots$ を n 回微分して、x=a と置くと

$$f^{(n)}(a)=b_n n!,\ \therefore\ b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (4)$$

となる．従って、 $f(x)$ は

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \qquad (6)$$

で表現出来る．これを、 $x=a$ の周りのテイラー展開と呼ぶ.

マクローリン展開は、a=0 と置いた特殊な場合に相当する。

x が小さいときにはx の高次項が無視できるので、（3）、（6）式を利用して$f(x)$ の近似式を得ることが出来る.

（関数の展開例）

$$(1\pm x)^p=1\pm px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\binom{p}{n}x^n+\cdots,\ \binom{p}{n}={}_p\mathrm{C}_n=\frac{p!}{n!(p-n)!}\quad\text{（二項係数）} \qquad (7)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (8)$$

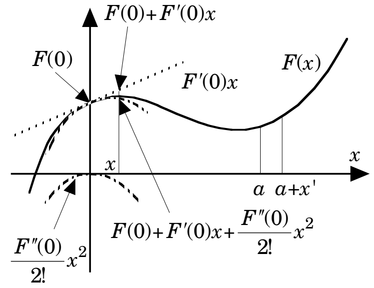
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad (9)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad (10)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (11)$$

問　各自これらの展開を確認せよ.

マクローリン展開、テイラー展開の意味



任意の何回でも微分可能な関数、即ち、何回微分しても滑らかな関数であれば、冪上の無限級数で表現可能である．0の周りの展開では、x が小さければ$F(x)$は$F(0)$で良く近似される．更に、x の接線$F'(0)$を使い$F'(0)\bullet x$ を加えると更に近似が高くなる．次にx=0で$F(x)$に接する$F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2$とすれば更に良く$F(x)$を再現できる．マクローリン展開が成立つことは、次数を上げていくと幾らでも正確に$F(x)$を再現できる事を示す．テイラー展開は、同じ事をx=aで考えればよい.

この性質を利用したのが近似式である．なにか比較する量と較べて（比較対象が存在することが大切）x が十分に小さければ、最初の補正項はマクローリン展開の第一項、$F'(0)x$ まで残せば十分である可能性がある． $\frac{F''(0)}{2!}x^2$ の項はx が 1 よりも小さければ小さいほど x に対して無視できるようになる．もちろん、x が偶然に消えてしまって残らないときには次の項 $\frac{F''(0)}{2!}x^2$ を残す必要がある．そうしないと何も残らないから．．．

よく使う近似式は、式(8)～(11) のx の 1 次或いは 2 次まで残した、

$(1+x)^{\pm p}\cong 1\pm px$， $x<<1$

$e^{\pm x}\cong 1\pm x$， $x<<1$

$\ln(1+x)\cong x$， $x<<1$

$\sin x\cong x$， $x<<1$

$\cos x\cong 1-\frac{x^2}{2!}$， $x<<1$

などである.