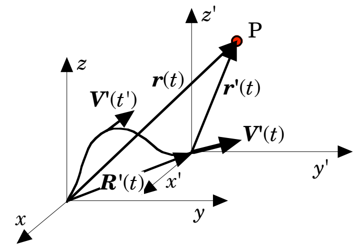
地表での質点の運動

これから質点の運動を考えるわけであるが、我々が住む地表面上は、ニュートンの運動法則が前提としている「慣性系」ではない．自転、公転などの回転運動をしているので、「速度、加速度」で見たように常に中心に向かう万有引力に起因する向心（中心に向かう）加速度が働いている．それでは、ニュートンの運動方程式は、地表では役に立たないのだろうか．ここでは、そうではなく、加速度が働いているために生ずる「見かけの力」（慣性力）を考慮してやれば、慣性系と同じ式が使えることを見ておこう．



見掛けの力 - 慣性力

図に示した２つの座標系、xyz-系（静止している「慣性系」）と$x'y'z'$-系（加速度運動も含む運動をする系）が時刻t=0 に重なっていたとする．$x'y'z'$-系が速度ベクトル$\boldsymbol{V}'(t)$で運動しているとき、時刻t における点Pの$x'y'z'$-系で見た位置ベクトル$\boldsymbol{r}'(t)$ は、xyz-系の位置ベクトル$\boldsymbol{r}(t)$ を用いて次のように書ける（**ガリレイ変換**）．

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}(t)-\int_0^t \boldsymbol{V}'(t)dt=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{R}'(t) \qquad (1)$$

運動している座標$x'y'z'$-系から見たP点の速度は、(1)式を時間で微分して、

$$\boldsymbol{v}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{R}'}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\boldsymbol{V}'(t) \qquad (2)$$

となる．もう一度、時間で微分すると、加速度

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}=\boldsymbol{a}'(t)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}-\frac{d\boldsymbol{V}'(t)}{dt}=\frac{1}{m}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}') \qquad (3)$$

が求まる．ここで、ニュートンの運動方程式が成り立っている xyz-系の運動方程式

$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}$ を使って、加速度を力に置き換えてある．第２項の $\boldsymbol{F}=-m\frac{d\boldsymbol{V}'(t)}{dt}$ は、 $x'y'z'$-系が加速度運動をしている（$\frac{d\boldsymbol{V}'(t)}{dt}\neq 0$）時に現れる「慣性力」と呼ばれる．

この式は運動する系（例：車内や地表面上）で見た点P の運動方程式であるが、見かけ上は慣性系上のニュートンの運動方程式と何ら変わらず、ただ、力として慣性力が加わっている点だけが異なる．円運動の場合は、加速度、$\frac{d\boldsymbol{V}'(t)}{dt}$（向心力/$m$）と反対向きの「遠心力（$mr$w^2）」が加わっている．もちろん、慣性系（$\boldsymbol{V}'$=一定、$\boldsymbol{F}=-m\frac{d\boldsymbol{V}'(t)}{dt}$=0）では慣性力はゼロになる．即ち、地表上であっても、(3)式のように、慣性力を含めた「力＝重力＋遠心力（慣性力）」が働くと考えれば、ニュートンの運動方程式の形はそのまま使えることが分かる．

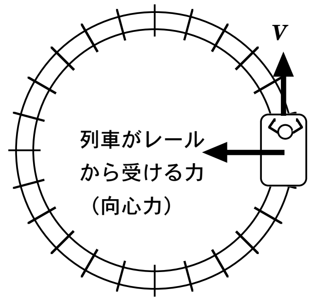
地表での運動方程式

結局、質点の運動方程式を考えるには、慣性系上か非慣性系（加速度系）かによらず、ニュートンの運動方程式に、遠心力などの慣性力を含めた、質点に働く全ての力$\boldsymbol{F}$ を使い

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\sum_i \boldsymbol{F}_i, \qquad (4)$$

とすれば良いことになる．下に示す例１、２のような場合には、見かけ上大変異なった振舞いをする．地表における質点の運動は、例１とも２とも異なっている．地表の物体は、円運動はしているけれど非常に遅いため、自転による見かけの力（遠心力）$\boldsymbol{F}'$ は重力より十分に小さい．従って、通常は遠心力を無視して、重力 $\boldsymbol{F}$ だけを近似的に考える事で十分なことが多い．

（例１）円運動する電車内の質点の運動を考えよう．体験的に良く知っているように、電車がカーブを曲がると、車内の物体はカーブの外側に力を受ける．これは、例２の人工衛星内の物体の運動（無重力状態）とは非常に異なっている．その理由は、円運動をするためには、遠心力と大きさが等しく、反対向きの「向心力」が必要な点にある．ところが、向心力は、車輪とレールが擦れることによって生ずるため、電車は円運動をするのだが、中の物体は直進するので、電車とは別々の運動をすることになる．即ち、車内に立っている人には足先のみに向心力が働く．体の重心から大分ずれているため、直線運動をする重心に向心力を加えるために、吊革で支えないと倒れてしまう．



（例２）人工衛星内に固定した座標系で書いた運動方程式も円運動をする非慣性系なので (3) 式が使える．人間にも人工衛星と全く同様に遠心力 $\boldsymbol{F}'$ に加えて、遠心力と逆向きで同じ大きさの向心力（地球の引力）$\boldsymbol{F}$=-$\boldsymbol{F}'$ が働いている．結局、(3)式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}=\frac{1}{m}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}')=0$$

となり、慣性系において全く重力が働いていないときと全く同じ運動をするように見えることが分る（スペースラボ内のボールの運動）．実際には、人工衛星の重心の位置からはずれると、重力と遠心力のバランスが崩れるので、微少重力環境と呼ばれる．ところで、スペースシャトルが軌道上を周回している時には、シャトルの向きが地球とシャトルを結ぶ軸に平行になっている．地球による重力と遠心力のバランスから、その理由を考えてみよう．