

強制振動

単振動をするバネや振子に、例えば電荷を付加した錘に電場で力を加えるように、周期的な外力を加えた場合の振動を「強制振動」と呼ぶ。この場合には、基本的に、その外力の振動数で振動するが、系の固有振動数と一致しない場合には振幅が強く外力の周期に依存する。

1) 摩擦がない場合

単振動の運動方程式（斉次2階微分方程式）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

に、外力 $f = f_0 \cos \omega t = f_0 \operatorname{Re}\{e^{i\omega t}\}$ を加えて強制振動の運動方程式（非斉次2階微分方程式）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \omega t \quad (2)$$

を得る。この運動方程式の解は、外力と同じ振動数を持つと予想されるので、

$$x = x_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

と置いてみる。(2) 式に代入して、

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)x_0 e^{i\omega t} = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t} \quad (4)$$

を得る。ここで、実数部分が実際の運動を表す。 $e^{i\omega t}$ がゼロ以外の解を持つためには、その係数部分がゼロでなければならない：

$$x_0 = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

従って、摩擦がない場合の強制振動の特解として、

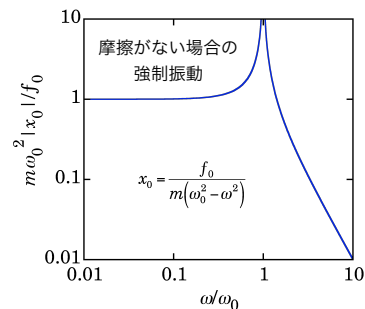
$$x = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (5)$$

を得、右図に示すように、 $\omega = \omega_0$ の時に共振し、振幅が発散する。また、 $\omega > \omega_0$ の時には振幅は負（位相が π ）になる。

摩擦が無い場合には、外力と振幅は同位相、或いは逆位相になる。また、一般解は、この一つの特解と、外力がゼロで (2) 式の右边がゼロの時の一般解を加えた、

$$x(t) = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} + A \cos(\omega t + \alpha)$$

で与えられる。



2) 速度に比例する摩擦が働く場合（特解）

(2) 式に速度に比例する抵抗を加えて、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \omega t, \quad (2\gamma = c/m, \omega_0^2 = k/m) \quad (6)$$

が、解くべき非斉次2階微分方程式になる。

この一般解は、一つの特解と、右边をゼロとした2階斉次微分方程式の一般解を求めて加えて得ることが出来る。

A) 特解を求める

強制振動なので、摩擦がある場合にも外力と同じ角振動数で振動すると考えられるので、やはり、(3) 式のように置いて(6) 式に代入すると、複素数の条件式、

$$\left((-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega)x_0 - \frac{f_0}{m} \right) e^{i\omega t} = 0 \quad (7)$$

が得られる。 $e^{i\omega t}$ は常に正なので、その係数がゼロの時にのみ、有意な解を与える。 x_0 について解くと、左辺の係数を実数にするような複素数の解、

$$x_0 = \frac{f_0}{m(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega)} = \frac{f_0}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

が得られる。これは、角 α を持つ複素ベクトル、 $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ 、

$$\cos\alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad \text{を用いて、}$$

$$x_0 = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{-i\alpha}$$

と表せ、(6) 式の特解は

$$x(t) = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \alpha)} = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} \quad (8)$$

と得られる ($x'_0 = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$)。

非斉次2階微分方程式の一般解

仮に、(6) 式の2つの特解 x_1, x_2 を得られたとする。その差の $X = x_1 - x_2$ を(6) 式に代入すると、

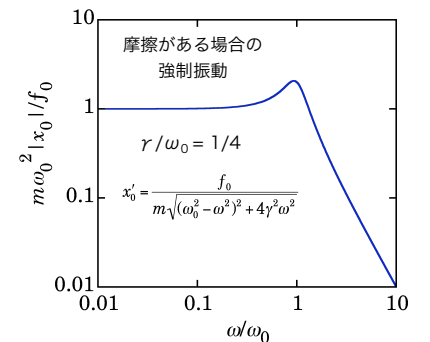
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \frac{f_0}{m} \cos \omega t \quad \text{と}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = \frac{f_0}{m} \cos \omega t \quad \text{が成り立つ。}$$

そこで、これらの差を取ると、

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\gamma \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{が得られる。}$$

即ち、 X は斉次2階微分方程式 ((1) 式のように右边が0の微分方程式) の解になっている。そこで、 X として一般解を求めて $X = x_1 - x_2$ に戻すと、 $x_1 = x_2 + X$ が得られる。この x_1 の性質を考えてみると、仮定より (6) 式を満たし、且つ、2階微分方程式の一般解に要請される条件の、2つの任意定数も含んでいる事から、(6) 式の一般解であることが分かる。



摩擦によって、 $\omega = \omega_0$ の発散が有限に抑えられる。

得られた特解の性質は、摩擦によって $\omega=\omega_0$ の発散が押さえられたことと、外力の振動と単振動系（バネや振り子）の振動の間に生じた位相のずれ、 $e^{-i\alpha}$ に特徴的に現れている。位相の遅れは、摩擦による振動の遅れが原因になっている。摩擦の存在には無関係だが、 $\omega \gg \omega_0$ では、単振動の固有振動数よりも外力の振動数が遙かに高いために、単振動系は全く応答しなくなる。

3) 摩擦がある場合の一般解

前ページのコラムにあるように、非斉次2階微分方程式の一般解を求めるには、2) で求めた一つの特解と、(6) 式の右边をゼロとした、斉次2階微分方程式（(6) 式に「属する斉次方程式」と呼ぶ）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (9)$$

の一般解を加えることにより得られる。そこで、 $x = e^{\lambda t}$ と置き、特性方程式を解くことにより、(9) 式を満たすべき条件を求めて、2つの特解を得よう。

(9) 式に代入すると、 $e^{\lambda t}$ がゼロ以外の解を持つ条件として、

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0 \quad \text{より、} \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0、\text{従って、} \quad (10)$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

が得られる。平方根内の正負により場合分けをして考える必要がある。

ア) $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ の場合：過減衰解

この条件は、摩擦の γ^2 が単振動を起こさせる元となる復元力の ω_0^2 よりも大きい場合に相当し、単振動的な運動はしないと期待される。2つの特解として、

$$x = \exp\left\{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t\right\}, \exp\left\{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t\right\}$$

が得られ、指数関数的な減衰を与える。(6) 式の一般解は、

$$x(t) = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} + e^{-\gamma t} \left(A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (11)$$

となる。 $\gamma \rightarrow \infty$ の極限では、

$$x(t) = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} + A + B e^{-2\gamma t}$$

と、摩擦のみに支配される。

イ) $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ の場合：減衰振動解

ア) とは反対に、復元力よりも摩擦が小さい場合で、減衰振動解を与える。2つの特解は、

$$x = \exp\left\{\left(-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right\}, \exp\left\{\left(-\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right\}$$

となり、一般解は、

$$x(t) = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} + e^{-\gamma t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) \quad (12)$$

として得られる。括弧内を三角関数に置き換えると、

$$x(t) = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} + e^{-\gamma t} \left(A' \cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + B' \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \quad (13)$$

になる。ここで、 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用い、

$$A = A' + iB', B = A' - iB'$$

と置いた。(13) 式は、単振動の振幅が、 $e^{-\gamma t}$ で減衰する、減衰振動を与える。

ウ) $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ の場合：臨界減衰解

(10) 式の平方根がゼロになるので、特性方程式から得られる特解は、

$$\lambda = -\gamma$$

と重根になるため、

$$x = e^{-\gamma t}$$

の1つのみである。2階微分方程式の一般解には、もう一つの独立な特解が必要になる。

そこで、特解の定数係数を時間の関数と置くと、もう一つの特解が得られる：

$$x = A(t) e^{-\gamma t}. \quad (14)$$

(14) 式を(9)式に代入すると、

$$\left\{ \left(\frac{d^2 A}{dt^2} - 2\gamma \frac{dA}{dt} + \gamma^2 A \right) + \left(2\gamma \frac{dA}{dt} - 2\gamma^2 A \right) + \omega_0^2 A \right\} e^{-\gamma t} = \left\{ \frac{d^2 A}{dt^2} + (\omega_0^2 - \gamma^2) A \right\} e^{-\gamma t} = \left(\frac{d^2 A}{dt^2} \right) e^{-\gamma t} = 0$$

が得られる。 $e^{-\gamma t}$ がゼロ以外の解を持つためには、

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 0$$

を満たす必要がある。これを解くと、容易に、 $A = a + bt$ が得られ、

$$x = (a + bt) e^{-\gamma t}$$

が2つの特解になる。従って、(6) 式の一般解が、

$$x(t) = x'_0 e^{i(\omega t - \alpha)} + (a + bt) e^{-\gamma t}$$

と求まる。この解を、臨界減衰解と呼び、(6) 式と等価な式を与える系の自動制御に応用され、最も素早く平衡値を得るための条件に相当する。

それぞれの解の時間変化の代表例を以下に示す。

