空気抵抗のある自由落下運動の例 09.5.20

我々が地上で暮らしていく上で、空気摩擦の影響は非常に大きい。例えば、雨の中を傘をさして歩く、或いは、パラシュートで降下する、等は、**「空気の重さ」**に起因する摩擦がないとするととんでも無いことが起こることを見てみよう。

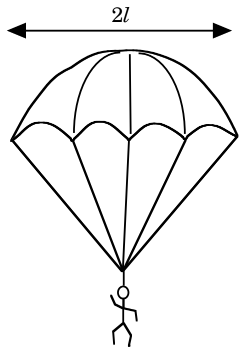
空気中の摩擦には、分子間の摩擦による**粘性抵抗**と、空気の重さによる**慣性抵抗**とがある。最初に、粘性抵抗の効果を考えたときに、雨やパラシュートがどの様な速度で降ってくるか具体的な数値を入れて考えよう。

粘性抵抗のみが働く場合

粘性抵抗があるときに、十分に高い場所から落下すると考えよう。実際には、限りのある成層圏ではあるが、話を単純にするために、十分高いところから落ちてきて、地表では摩擦力と重力とが釣り合い、それ以上落下速度が変化をしない状況、**「終端速度 v_f」**になっていると仮定する。粘性抵抗がある場合の終端速度は

$$v_f = \frac{mg}{C} = \frac{mg}{6\pi a\eta}$$

で与えられるので、雨滴、パラシュート、それぞれの数値を入れてみよう。



$\rho \approx 1.3$ kg/m^3

図 1 ：パラシュートで安全に落下出来るのも、空気に重さがあるお陰。

まず、半径が a = 1 [mm] = 10^{-3} [m] の雨粒を考えよう。水の密度は ρ = 1 [g/cm^3] = 10^3 [Kg/m^3]、重力加速度は g = 10 [m/s^2]、空気の粘性率は η = 1.8×10^{-5} [Pa•s] として、単位を全て Kg, m, s にしてから代入すると、終端速度は、

$$v_f = \frac{mg}{6\pi a\eta} = \frac{\frac{4\pi}{3}(10^{-3})^3\times10^3\times10}{6\times3.14\times10^{-3}\times1.8\times10^{-5}} = 1.23\times10^2 \text{ [m/s]}$$

が得られます。すごいですね、秒速 120 m ですよ！時速で言うと 400 km 以上です。この雨粒による衝撃も大したものになりそうです。直径 2 mm を通過する間にあなたの頭が、雨粒が持っていた全ての運動量を吸収しなければなりません。実効的にこの雨粒を止めるのに必要な短い時間に働く力は、雨粒の質量を約 4×10^{-6} [Kg] として、

$F = \Delta P/\Delta t = \Delta mv/\Delta t = 1.23\times10^2\times4\times10^{-6}/(2\times10^{-3}/1.23\times10^2) = 30$ [N] = 3 [Kg重]

になります。最後の単位は、重力に換算した値を意味します。即ち、一粒ごとに 3 Kg の重みを感じるのですね。時間は 0.00002 秒と短いですが。

続いてパラシュートの場合を考えましょう。降りる人の体重を仮に 70 Kg、パラシュートの半径を 5 m とします。同じ計算式で、粘性抵抗がその半径の球の表面積で生じると仮定すると（荒っぽいですが）、パラシュートの終端速度は、

$$v_f = \frac{mg}{6\pi a\eta} = \frac{70\times10}{6\times3.14\times5\times1.8\times10^{-5}} = 4.12\times10^5 \text{ [m/s]}$$

になります。毎秒 400 km と言う、このとてつもない速さはどんな高さから落ちれば得られるのでしょう。加速に要する時間は、重力加速度で割り 4×10^4 秒、即ち 11 時間もかかります。実際にはこんな猛スピードになることはないでしょう。これが意味する事は**「パラシュートと粘性抵抗では、全く減速されない」**と言うことです。即ち、現実の世界のパラシュートを説明するには粘性抵抗では不可能である、と言うのが結論です。

慣性抵抗のみが働く場合

それでは、次に、**空気の重さ（慣性質量x重力加速度）に起因する慣性抵抗**の効果を見てみましょう。慣性抵抗による終端速度は、

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{D}} = \sqrt{\frac{mg}{k\rho S}}$$

で与えられます。k は 1 以下の係数。雨滴の場合は、質量を約 $m = 4\times10^{-6}$ [Kg]、g = 10 [m/s^2]、断面積 = πa^2、空気の密度 ρ = 1.3 [kg/m^3] を代入すると、

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{k\rho S}} = \sqrt{\frac{4\times10^{-6}\times10}{1.3\times3.14\times(10^{-3})^2 k}} = \sqrt{9.8/k} \approx \frac{3.1}{\sqrt{k}} \text{ [m/s]}$$

となります。時速 約 11 km です。走行中の電車の窓を雨が濡らす角度を考えると、ちょっと遅い速さだと思います。k は 0.5 或いはもっと小さいと考えられます。
この終端速度に到達するのに要する時間は重力加速度で除して、t_0 = 3.1/g ≈ 0.3 秒ほどの短時間です。k=0.25としても 0.6 秒ほどです。と言うことは、雨として降下し始めると直ぐに現実的な大きさの終端速度になっていると考えられます。

さて、パラシュートの方はどうでしょうか。質量 m = 100 [Kg]、パラシュートの直径を 5 [m] とすると、

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{k\rho S}} = \sqrt{\frac{100\times10}{1.3\times3.14\times2.5^2 k}} = \sqrt{39.2/k} \approx \frac{6.3}{\sqrt{k}} \text{ [m/s]}$$

となります。地表で飛び降りる場合と比較するともう少し感覚的に理解できるでしょう。g ≈ 10 m/s^2 なので、飛び降りた後、約 0.6 秒後の速さです。$h = gt^2/2$ を使うと、高さにして 1.8 m 程の壁から飛び降りたような衝撃を受ける事になります。これなら、上手く飛び降りれば怪我をしないですむ高さと言えそうです。k の値は小さな雨滴の場合とは違い、もっと 1 に近いと考えられます。

以上の計算結果から、**慣性抵抗**を考えると、日常の経験に沿った振る舞いが予測できる事がわかりました。一方、**粘性抵抗**は、質点の速度が遅い場合に効いてきます。例としては、電荷素量を観測する有名な実験として知られる、**「ミリカンの油滴の実験」**が当てはまります。マイクロメートルサイズの油滴が落下する速度は、粘性抵抗で良く理解できます。油滴の形状が球形だとすると、落下速度から油滴の質量、またそれから半径が見積もれることは粘性抵抗の式を眺めると予測できるでしょう。

Reynolds number

レイノルズ数は、流体中の運動を考える際に指標となる無次元数で、慣性力と粘性力の比を与える。

$\mathrm{Re} = VL/\nu$

V は特徴速さ, L は特徴長さ, ν は動粘性係数で、$\nu = \mu/\rho$、ここで μ は粘性係数、ρ は流体の密度である。次元は、

$$\mathrm{Re} = [VL/\nu] = \left[\frac{(\mathrm{m/s})\bullet\mathrm{m}}{\mathrm{Pa}\bullet\mathrm{s}(\mathrm{m}^3/\mathrm{Kg})}\right] = \left[\frac{(\mathrm{m/s})\bullet\mathrm{m}}{(\mathrm{N/m}^2)\bullet\mathrm{s}\bullet(\mathrm{m}^3/\mathrm{Kg})}\right] = [\mathrm{N/N}]$$

と無次元である。

　雨粒を考えると、

$\mathrm{Re} = 10\mathrm{x}10^{-3}/10^{-5} \approx 10^3$

と、慣性抵抗領域であることが分かる。

　パラシュートでは、

$\mathrm{Re} = 10\mathrm{x}1/10^{-5} \approx 10^6$

となり、3桁も大きくなる。

　レイノルズ数が大きくなることは、粘性力では慣性に遮られて運動が起こせないことを意味する。即ち、流体内が各部ばらばらに振る舞うわけで、乱流的になると予想される。

　一方、レイノルズ数が 1 よりも小さい場合には、慣性の影響は大きな効果を持たず、粘性により流れが支配され、層流となることが期待される。

　雨粒の場合は、雨の周囲を比較的層流的に流れ、慣性抵抗の影響が効きにくくなり、係数 k は小さめになると考えられる。パラシュートでは、慣性のみを考えれば良く、$k \approx 1$ となっている。