弾性衝突

２つの質点（大きさがあっても重心の周りの回転運動を考えない、と言う意味で質点）の正面衝突を考える。現実の世界では、必ず衝突をするたびに、２つの質点が持っていた全運動エネルギーは、その一部が、音や熱エネルギーに変化するため、徐々に失われていく。最初は、理想的な場合として、衝突の際に系に含まれる力学的運動エネルギーが全く失われないとしよう。この場合を、**弾性衝突**、と呼ぶ。

衝突現象は、複数の質点の相互作用を含み、２つのそれぞれの質点についての運動方程式を連立させて解く必要がある。運動方程式は、時間の関数であり、衝突直後のそれぞれの質点の弾性的な歪みをちゃんと取り込んで解かなければならず、一般的に、その解を求めるのは容易ではない。そこで、通常は、衝突前後の状態の間に成り立つ関係式を用いて解くことが多い。そうすれば、衝突中（２つの質点が接している瞬間瞬間）に起こっていることを顕わには考える必要が無くなり、解をずっと容易に求めることが出来る。

さて、弾性衝突の前後で成り立つ２つの関係式は、**運動量保存則**と**エネルギー保存則**

$Mv_1+mv_2=Mv_1'+mv_2'$、 (1: 運動量保存則)

$\frac{Mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=\frac{Mv_1'^2}{2}+\frac{mv_2'^2}{2}$、 (2: エネルギー保存則)

である。どちらもニュートンの運動法則から導くことが出来る。**運動量保存則**は、全エネルギーが衝突の前後で保存しないような、**非弾性衝突**の場合を含む一般的に成り立つ関係式である。弾性衝突の例として、中でも最も単純な場合を考えよう。即ち、２つの質点の質量が等しく、$v_2=0$ の場合である。この場合には、２つの式は

$mv_1=mv_1'+mv_2' => v_1=v_1'+v_2'$ (3)

$\frac{Mv_1^2}{2}=\frac{Mv_1'^2}{2}+\frac{mv_2'^2}{2} => v_1^2=v_1'^2+v_2'^2$ (4)

と書ける。これらの連立方程式は、(3) 式を２乗して (4) 式に代入することにより容易に解ける：

$v_1'v_2'=0.$

この簡単な関係式から、$v_1'=0$ であることが分かる。何故ならば、どちらかがゼロでなければならないことに加えて、$v_2'=0$ だとすると、質点１が、質点２をすり抜けて通過したことになり、現実にはあり得ないためである。

結論として、

> 質点が、静止している同一質量の質点に速度 v で正面衝突すると、持っていた全ての運動量が衝突された質点に移動して、衝突した質点は静止する。

ことが分かる。このことは、右図の様な衝突球のおもちゃとして良く知られている。

摩擦のない大きさのある円盤の弾性衝突

次に簡単な例として、**摩擦を考えない**同一質量の２つの円盤の側面衝突を考える。この時に成り立つ関係式は、(3), (4) 式と同一である。異なる点は、速度が大きさだけのスカラー量ではなく、方向まで持つ**ベクトル量**になることである。ベクトル量を太字のアルファベットで表すと、

$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_2'$、 (5)

$v_1^2=v_1'^2+v_2'^2$、 (6)

と書ける。(6) 式で、速度ベクトルの２乗は、速度ベクトルの長さの２乗になることに注意すれば、この連立方程式を解くのも難しくない。(5) 式の両辺を２乗すると、

$v_1^2=v_1'^2+2\boldsymbol{v}_1'\bullet\boldsymbol{v}_2'+v_2'^2$ (7)

となるので、(6) 式を使って、容易に、

$\boldsymbol{v}_1'\bullet\boldsymbol{v}_2'=0 => v_1'v_2'\cos\theta=0 => \cos\theta=0 => \theta=\pi/2=90°$ (8)

が得られる。ここで、θ は、２つの速度ベクトルが互いに成す角度を表し、弾性衝突では、図１のように、常に**互いに90度の角度**を保ちながら衝突後の運動をする。

非弾性衝突

実際の円盤の衝突には、必ず**摩擦**による**力学的運動エネルギーの損失**が伴う。その結果として、音が出たり、球の温度が上昇したりする。その効果は、(2) 式の等号が成り立たないとして現れる。即ち、左辺が右辺よりも大きいという不等号で表現される：

$\frac{Mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2} \geq \frac{Mv_1'^2}{2}+\frac{mv_2'^2}{2}.$

この効果は、上の円盤の弾性衝突の例の (6) 式を

$v_1^2 \geq v_1'^2+v_2'^2$

と変化させる。その結果、(8) 式が

$\boldsymbol{v}_1'\bullet\boldsymbol{v}_2' \geq 0 => v_1'v_2'\cos\theta \geq 0 => \theta \leq \pi/2=90°$

となり、θ が cos が１よりも小さい値を与えるような、θ ≤ π/2 を満たす運動をする。この結果は、２枚のコインや、浮揚した円盤を相手ゴールに入れるゲームなどで確認することが出来る。

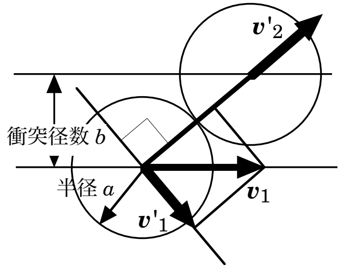


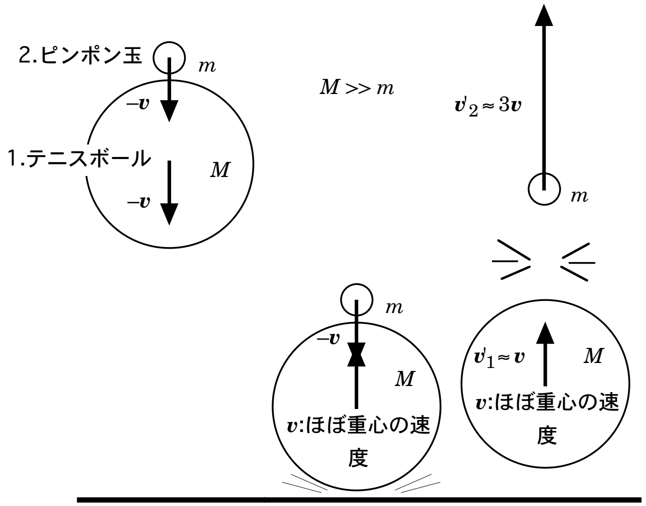
図１：２つの摩擦のない同一質量を持つ円盤の衝突。２つの円盤の接点には摩擦力が働かないため、重心を結ぶ方向にしか力が働かない。その方向成分の運動は、(3), (4) 式と同じ解を与えるため、全てのその方向の運動量は、v_2' に移動する。それと垂直な速度成分は、衝突によって全く影響を受けないため、v_1' の衝突後の速度を与える。

親子ボール

下図のように、大きくて重い硬式テニスボールの上に軽くて小さいピンポン玉を載せたまま自由落下させ（下図左）、床に衝突した後の振舞いを観察しよう．上手くピンポン玉がテニスボールの中心に保てれば、ピンポン玉だけを床で弾ませた場合に較べると遥かに高く、最大で９倍くらい高くまで弾むのを観察できる．

その理由を考えてみよう．議論を簡単にするために、床との反発係数 e は１（弾性衝突）としよう．概念的には次のように説明できる．テニスボールの質量 M はピンポン玉の質量 m よりも十分に重いので、親子ボールの重心の位置は、ほぼテニスボールの重心（中心）にある．さて、テニスボールが床で反射された直後を考えよう（下図中央）。まず最初に、テニスボールが直前に持っていた速度 $-v$ （鉛直上方を正に取っている）は v に変化する．即ち、床との衝突後の重心速度は上方に v だと考えて良い．ここで考えているのは、テニスボールは床に衝突したが、ピンポン玉はまだテニスボールに衝突する直前の瞬間である。テニスボールは上向きに速度 v でピンポン玉は下向きに $-v$ であるため、両者は相対速度 $2v$ の正面衝突をすることになる．親子ボールの重心がほぼテニスボールの中心にあるため、重心に対する相対速度 $-2v$ を持つピンポン玉の衝突は、静止した壁に弾性衝突するのと同じ振舞い、速度 $-2v$ から $2v$ への変化，をする．即ち、ピンポン玉は、親子ボールの重心から速度 $2v$ で離れていく。重心自身は速度 v で運動しているので、結局、ピンポン玉は $2v+v=3v$ で床から離れていく．

ピンポン玉が弾む高さは、テニスボールと衝突した直後に持っていた運動エネルギー $mv^2/2$ が位置エネルギー mgh に変わるので、ピンポン玉単独の v の３倍の速度の持つエネルギー、即ち速度の２乗の９倍の高さまで上がることになる．



次に、力学的エネルギー保存則と運動量保存則を使って式で予測しよう．

力学的エネルギー保存則

保存力場（ここでは重力場）内で運動する限り、位置の変化に伴う重力ポテンシャルの変化分は運動エネルギーの変化分とちょうど打消すので、運動エネルギーと位置エネルギーの和は親子ボールの衝突前後で変化しない．又、衝突直前と直後を較べると、位置エネルギーは変化しないので、前後の運動エネルギーの和が保存する：

$$\frac{Mv^2}{2}+\frac{m(-v)^2}{2}=\frac{Mv'^2_1}{2}+\frac{mv'^2_2}{2}. \qquad (1)$$

左辺は図の中央の絵に相当し、右辺は右の絵の状態を表す．この２つの絵の間には、親子ボール間の衝突以外には外からは力が働くことはない．この時には運動量も保存する：

$$Mv-mv=Mv'_1+mv'_2. \qquad (2)$$

(2) 式を

$$Mv'_1=-mv'_2-mv+Mv \qquad (3)$$

と変形して(1) 式に代入すると、

$$mv'^2_2=Mv^2+mv^2-Mv'^2_1=Mv^2+mv^2-\frac{(M-m)^2}{M}v^2+2\frac{m(M-m)}{M}vv'_2-\frac{m^2}{M}v'^2_2$$

となり、両辺を整理すると、

$$v'^2_2-2\frac{M-m}{M+m}vv'_2-\frac{3M-m}{M+m}v^2=0$$

が得られる．これを解いて

$$v'_2=\left(\frac{M-m}{M+m}\pm\sqrt{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2+\frac{3M-m}{M+m}}\right)v$$

となる．$M >> m$ の条件下では、

$$v'_2=-v \ \ or \ \ 3v$$

が解になる。しかし、$-v$ は衝突せずに通過する場合なので物理的に除外され、$3v$ が求めるピンポン玉の速度になる。確認のために $M=m$ の場合を考えてみると、

$v'_2=\pm v$ （「トンネルしない」条件から、v のみが物理的に合理的な解）

と予想される解を与えることが確認できる。