ヨーヨーの運動

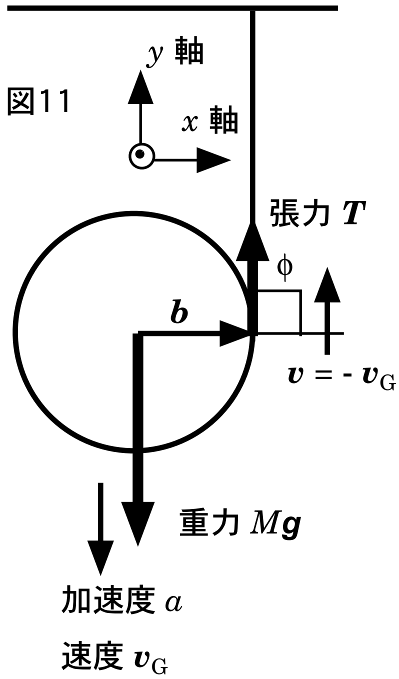

図１１は、一様な円柱で出来たヨーヨーの模式図である．ここでも回転運動と並進運動の両方程式を考える．

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=\sum\boldsymbol{F}$$ （重心の並進運動の方程式）

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\sum\boldsymbol{N}$$ （重心の周りの回転運動の方程式）

ヨーヨーに働く力の合力は：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T} + M\boldsymbol{g}$$

重心の周りの回転を支配する力のモーメントは

$$\boldsymbol{N}_T=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{T}$$

なので、運動方程式は、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=\boldsymbol{T}+M\boldsymbol{g}$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{T}$$

となる。両式を同じパラメーターで表そう。そこで、角速度を円周の速度ベクトルで表すために、右からベクトル $\boldsymbol{b}$ の外積をかける。

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{T})\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{T})=-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{T})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{b})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{b})=b^2\boldsymbol{T}$$

$\boldsymbol{b}$ ベクトルは一定なので、$I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{b}=I\dfrac{d(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b})}{dt}=I\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-I\dfrac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}$ と重心の速度で表すことができる。

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=\boldsymbol{T}+M\boldsymbol{g}$$

$$I\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=-b^2\boldsymbol{T}$$

両式から張力 $\boldsymbol{T}$ を消去すれば

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=-\frac{I}{b^2}\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}+M\boldsymbol{g}$$

より

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt}=\frac{1}{1+\dfrac{I}{Mb^2}}M\boldsymbol{g}$$

が得られ、重心の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}}$ は重力加速度 $\boldsymbol{g}$ の方向に加速される。円柱の場合は、$I=Mb^2/2$ で与えられるので落下の加速度は自由落下の場合の 2/3 になる。