波動

波動とは

運動は、大きく並進運動と振動運動に分けられる。回転運動も、図２のように、振動面が互いに９０度ずれた２つの振動運動の和として表わせる。

振動は、ピンと張った弦、振子、バネのように、力を加えて平衡状態からずらした時に、元に戻ろうとする力「**復元力**」と「**運動の慣性**」とが組み合わさって起こる。

波動は、その振動が空間を伝わっていく（伝搬する）運動である。我々に身近な例としては、水の波や音の波がある。音の波が空間を伝わっていくことは、離れた場所の間で会話が出来ることから明らかだが、残念ながら空気の振動は目で確かめることが出来ない。一方で、ギターやバイオリンの弦の振動は、伝搬していないように見えるが、実は、波動が弦の上を伝搬している。しかし、長さに限りのある弦の端で反射されて帰っていく。弦の端が固定されている場合（**固定端**）には、端の位置で常に変位がゼロに固定されるため、反射した波動の進行方向が反転すると同時に、その位相が π だけずれて（波の振幅が反転して）、図３のように互いに打ち消し合っていると理解出来る。弦の振動のように、伝搬する波が限られた空間の範囲に閉じこめられている状態を「**定在波**」あるいは「**定常波**」と呼ぶ。これは、伝搬する波の「**進行波**」と対置して呼ばれる。図４に示すように、定常波は、時間と共に振動する「**腹**」の部分と、常に振幅がゼロで振動しない「**節**」の部分からなる。この振動の腹が弦楽器の胴を、そして空気を振動させて音波を発生させる。別の例として、図５のように端が固定されていない「**自由端**」の場合にも端で反射されるが、固定端と異なり自由に動けるので、反射波の位相は変化せず、入射波と同じと理解できる。

振動が伝搬し波動となるのは、波を伝搬させる「媒質」同士が互いに力を及ぼし合うためであり、真空の壁でさえぎると音が伝わらなくなるのは、媒質同士が接していないため振動が伝わらないと理解できる。

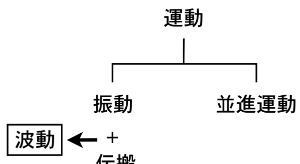


図1

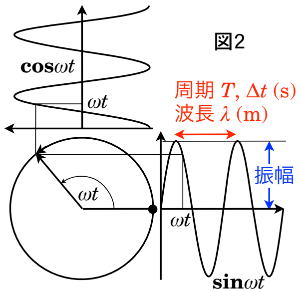


図2

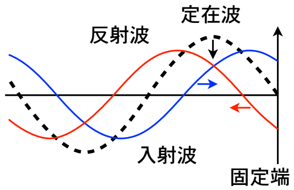


図3 固定端での反射

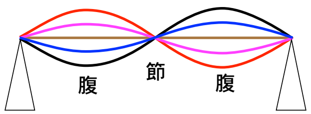


図4 弦の定在波

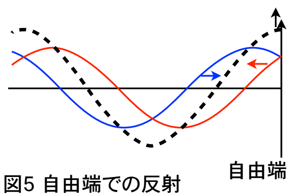


図5 自由端での反射

横波・縦波（粗密波）

波を伝搬させる媒質は、弦の波では「固体」、音では「固体、液体、気体」、海岸の波では「液体」であり、光波では「電場、磁場」が媒質になる。媒質の種類によって、波の変位が波の進行方向に対して垂直になる図６のような「**横波**」と、図７のように変位が波の進行方向と平行な「**縦波**」とがある。横波には、棒や弦を伝わる波、水の波、光の波があり、縦波には、音波、コイルバネや棒を伝わる波がある。これらの違いは、媒質間に働く力によって決まる。音波のような**粗密波**は、媒質間に反発力が働けば起こり得るが、横波は、接する媒質間のズレに対して復元力が働いて起こる。そのため、気体のようにズレに対する引力が非常に弱い媒質では復元力が働かないために横波は立たない。

表1 種々の波の性質

波の種類	媒質	横波	縦波
音波	気体		○
水の波	液体	○	○
棒の波	固体	○	○
光波	電磁場	○	

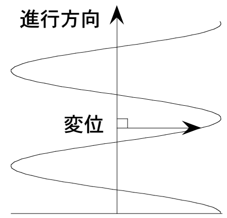


図６　横波：進行方向と変位の方向が垂直。

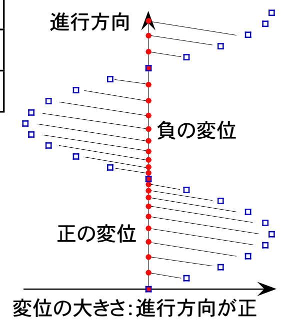


図７ 縦波（粗密波）：変位が進行方向と平行。等間隔に並んでいた丸記号が、進行方向に四角記号で表現される大きさの正負の変位をした粗密分布。

振動数・周期・波長

１秒間に振動する回数が「**振動数**」f（1/s）で、その逆数に相当する１回振動するのに要する時間を「**周期**」T（s）と呼ぶ。振動数 f に 2π を掛けると、１秒間に進む位相角に相当する「**角速度**」或は「**角振動数**」ω（rad/s）になる。波動の場合は、更に「**波長**」λ（m）が定義され（図２参照）、１周期の間に進む距離を表す。波が進む速さ v は、波長 λ に振動数 f を掛けて

$v=f\lambda=\dfrac{\lambda}{T}$ で与えられる。

進行波・定在波

音波や水波のように、媒質中を進む波は、

$$y(t,x)=A\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right), \qquad (1)$$

と表される。ここで、y は波の変位で、時間と位置の関数として表される。時刻 t と位置座標 x との間の関係は図８を参照のこと。一方、定在波は、

$$y(t,x)=A(x)\sin(\omega t+\alpha) \qquad (2)$$

で与えられる。ここで、α は位相定数を表す。

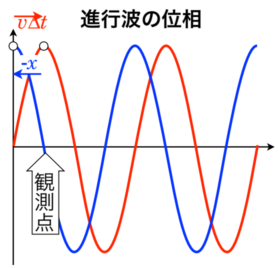


図８　固定した位置で進行波を観測すると、時間が Δt 秒経過することと、同時刻で $-x$ だけ戻ることとは等価。

波動方程式

弦を伝わる音波

波動が従う一次元の運動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を、弦の振動を例に導出しよう。

図９には弦の一部を拡大してある。弦には張力 T が働いている。弦の微小部分 dx の質量は、線密度 σ を用いて σdx と書ける。dx 部分の、弦に垂直な、y 方向の運動を決めるのは dx 両端の張力の y 成分の差

$$T_\perp(x+dx)-T_\perp(x)$$

なので、運動方程式の y 成分は

$$\sigma \mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T_\perp(x+dx)-T_\perp(x)$$

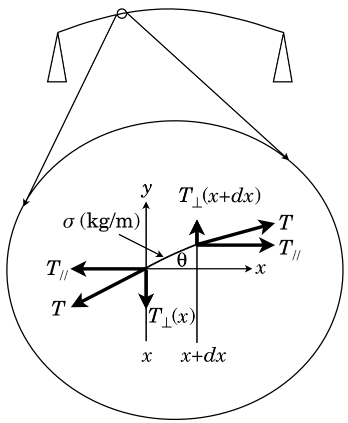


図９　弦の微少部分 dx に働く張力 T と弦に働く復元力の関係。

と書ける。両辺を dx で除し、dx を極限まで小さくすれば、微分の定義から

$$\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{T_\perp(x+dx)-T_\perp(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial T_\perp(x)}{\partial x}, \qquad (3)$$

を得る。x 方向は弦の張力により運動が制限されており、θ が小さい場合は $T_{//}$ はほぼ等しく、打ち消し合っている。一方、$T_\perp$ は $T_\perp = T\sin\theta$ と書け、接線の傾き $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\tan\theta$ を使えば $T_\perp=T\cos\theta\frac{\partial y}{\partial x}$ となる。$\theta << 1, \cos\theta \approx 1$ の条件で得られる $T_\perp=T\frac{\partial y}{\partial x}$ を(3) 式に代入して、

$$\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial T_\perp(x)}{\partial x}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad \frac{T}{\sigma}\text{ の単位：}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg/m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{kgm/s^2}}{\mathrm{kg/m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}\right]=\left[v^2\right] \qquad (4)$$

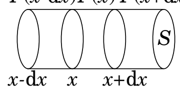
と、波動方程式が得られる。

空気中を伝わる音波

次に、空気中の縦波の音波の運動方程式を導出する。断面積 S、長さ Δx、空気の密度 ρ を用いて質量がm=ρSdx で表される体積 $\Delta V=S\Delta x$ の気柱の運動 $y(t,x)$ を考える。

音波の様な非常に速い運動では、外部と熱のやり取りがない断熱的な変化で成立つ関係式 PV^γ=一定（γ=1.4：２原子分子の比熱比) を満たし、この関係式から隣接する気柱間の圧力差が気柱に及ぼす力を見積もることが出来る。

まず、圧力が P_0 の空気を考える。位置 x における圧力を $P(x)=P_0+\Delta P(x)$、変位を $y(t,x)$ （縦波なので dx の変化量）とすると、

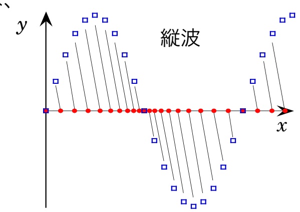


$$P_0\Delta V^\gamma = P_0(S\Delta x)^\gamma = P(x)S^\gamma(\Delta x+\Delta y)^\gamma = P(x)(S\Delta x)^\gamma\left(1+\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^\gamma = \text{constant}$$

が成り立つ。音波による圧力変化（音圧）は、気圧 P_0 に比較して十分に弱い場合を考えるので、変位の割合も $\Delta y/\Delta x << 1$ が成り立つ。この条件では、

$$\left(1+\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^\gamma \simeq 1+\gamma\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

の近似が成り立ち、



$$P_0(S\Delta x)^\gamma \simeq (P_0+\Delta P(x))(S\Delta x)^\gamma\left(1+\gamma\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$P_0 \simeq P_0+\Delta P(x)\left(1+\gamma\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)+\gamma P_0\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

より、x の位置の気柱の圧力のズレ $\Delta P(x)$ が求まる。

$$\Delta P(x)\left(1+\gamma\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \approx \Delta P(x) = -\gamma P_0\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

働く力と圧力の符号が逆である事を考慮して、x の位置の気柱に働く力 F と運動方程式が見積もれる。

$$F(x)=S\left[\Delta P(x)-\Delta P(x+\Delta x)\right]$$

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F,\ \ \rho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=S(\Delta P(x)-\Delta P(x+\Delta x))$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x+\Delta x)-\Delta P(x)}{\Delta x}=\gamma P_0\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y(x+dx)}{\Delta x}-\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}}{\Delta x}=\gamma P_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\gamma P_0}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \ v=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$$

が得られる。

進行波の速度

波の運動方程式の進行波解を求めるために、(4) 式に進行波の関数

$y(t,x)=A\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)$ を代入すると、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]、\qquad \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-A\frac{T}{\sigma}\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)$$

となる。(1) 式が (4) 式の解である場合はこれら両式は等しいので、弦を伝わる波の速さが

$$v^2=\frac{T}{\sigma} \qquad (5)$$

と確認される。

定在波解（弦の共振現象）

ギターのような、両端が固定された長さ L の弦の振動を考える。波は両端で反射を繰り返すため、波の腹の位置が変化しない定在波が出来る。そこで、(2) 式の $y(t,x)=A(x)\sin(\omega t+\alpha)$ の形の解を求めてみよう。$A(x)$ のみが x の関数である点に注意して (2) 式を (4) 式の両辺に代入すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A(x)\omega^2\sin(\omega t+\alpha),$$

$$v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=v^2\frac{d^2A}{dx^2}\sin(\omega t+\alpha),$$

を得る。両式は等しいので、振幅 A に関する微分方程式、

$$\frac{d^2A}{dx^2}=-\left(\frac{\omega}{v}\right)^2A(x)=-k^2A,\quad k=\frac{\omega}{v}$$

を得る。通常の単振動と同じ形の式が得られる（A は x のみの関数なので ∂ の代わりに、d を使った）。ここで、$k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{f\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}$ は、波数と呼ばれ、１m の中に含まれている波の数を2π (rad) 倍した角度 rad で表す（$k = 2\pi$ (rad) の時に１m中に１波長含む）。

弦の両端は固定されているので、$A(x) = A_0 \sin(kx+\beta)$ と置いて境界条件を入れると、

$x = 0$：$A_0 \sin\beta = 0$ なので　$\beta = 0$　($\because A_0 \neq 0$)

$x = L$：$A_0 \sin kL = 0$ なので　$kL = n\pi,\ k = \omega/v = n\pi/L,$

n は振動の腹の数。ω を $f=\frac{\omega}{2\pi}$ に代入して振動数が満たす条件式

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{n}{2L}v=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \qquad (6)$$

が得られる。

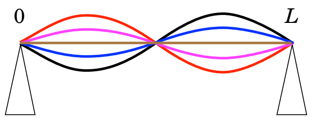


図10　n=2 の定在波

この式は、弦楽器の音程を決定する原理を与える式である。弦の長さ L、張りの強さ T、弦の線密度 σ 等を用い、音程を解析できる実用的な式である。

最終的に定在波の解は以下の様に与えられる。

$$y(t,x) = A_0 \sin kx \sin(\omega t+\alpha) = A_0\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(2\pi ft+\alpha\right),\ f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

楽器と音程

楽器には、弦の振動（横波の定常波）を利用した弦楽器や、管の中の空気の縦波の振動を利用した管楽器などがある。通常、音程の基準には、A 音（ドイツ語読みで「アー」と発音し「ラ」に相当）として、440 Hz が用いられることが多い。弦楽器の場合は、(6) 式

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{n}{2L}v=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

の n として１（定常波の腹の数が１）、弦の長さ L や弦の線密度 σ（材質や弦の太さで決まる）はバイオリンからコントラバスまでそれぞれ固有の音域をカバーする楽器の特徴的な大きさに合わせて選ばれる。そこで、弦楽器の音程を合わせるためには、弦の張りの強さ、即ち、張力 T を調整する。

管楽器では、(6) 式の代わりに音速 v を用いて考える。

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{n}{2L}v$$

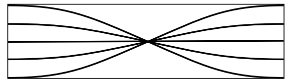

$L,\ n$=1

図１１ 管楽器の管内の定常波

この関係式と音速 $v \approx 331+0.60\,\Delta T$ m/s を用いて、例えば 27 度 C において n=1 の時に「ラ」音を出すために必要な管の長さ L が求められる：

$$L=\frac{v}{2f}=\frac{347\ \mathrm{m/s}}{880\ \mathrm{Hz}}\approx 40\ \mathrm{cm}。$$

しかし実際の楽器、例えばトランペットでは管長が約 1.3 m 程ある。この違いは腹の数にある。トランペットの場合には n は１ではなく、n=3 である。また、管楽器の音程は気温で変化し、吹込む息の温度でも変わる。 弦楽器と異なり、管楽器の音程は主に管長を調整して合わせる。

表２に、平均律音階の場合の振動数と音程の関係を示す。振動数が２倍になると１オクターブ上がり、その間を均等な比率で１２半音に割り振ってある。そのためには、n 半音毎に $2^{\frac{n}{12}}$ $(=\left(\sqrt[12]{2}\right)^n)$ 倍していけばよい。

表2 音程と波長の関係

振動数の比		音程	振動数
$2^{\frac{12}{12}}$	2.000	ラ/A	880
$2^{\frac{10}{12}}$	1.782	ソ/G	784
$2^{\frac{8}{12}}$	1.587	ファ/F	698
$2^{\frac{7}{12}}$	1.498	ミ/E	659
$2^{\frac{5}{12}}$	1.335	レ/D	587
$2^{\frac{3}{12}}$	1.189	ド/C	523
$2^{\frac{2}{12}}$	1.122	シ/B	494
$2^{\frac{0}{12}}$	1.000	ラ/A	440

補足）音速は $v=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\approx 331+0.60\,\Delta T$ m/s、（ΔT: 気温 [ºC]、P: 気圧 [Pa] = [N/m^2]、γ =1.4: ２原子分子の比熱比、$\rho = M/V$: 体積密度 [kg/m^3]）で表され、

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma PV}{M}}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M/n'}}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma RT}{m}}$$

が振動数を与える式になる。ここで、気圧と密度は比例する量（$P=n'RT/V$、n' は空気のモル数）なので、音速は気圧にはよらず、絶対温度 T [K] の平方根に比例する。また、$m=M/n'$ は分子量 [Kg/mol]、R=8.314 [J/(K mol)] は気体定数。

音のうなり

２つの異なる振動数（音程）の音を混ぜる事により、それらの振動数の差に相当する振動数を持つ「音のうなり」が生じる。

例として、わずかに異なる２つの振動数 $f_1 = f_0 + \Delta f$ と $f_2 = f_0 - \Delta f$ の音の混ざりによって生ずるうなりを考える。

音の混ざりは、２つの波の重ね合わせで表現される。

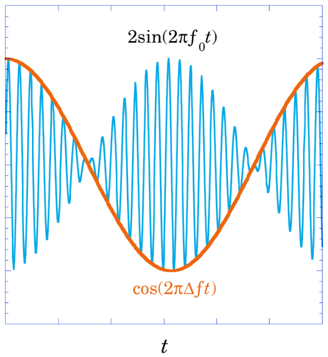
$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = \sin(2\pi(f_0+\Delta f)t) + \sin(2\pi(f_0-\Delta f)t) \\ &= 2\sin(2\pi f_0 t)\bullet\cos(2\pi\Delta f t) \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで、 $f_0 = \dfrac{f_1+f_2}{2}$ は平均振動数 、 $\Delta f = \dfrac{f_1-f_2}{2}$ はうなりの振動数を表す。

また、ω=2πf を使うと、

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin((\omega_0+\Delta\omega)t) + \sin((\omega_0-\Delta\omega)t) \\ &= 2\sin(\omega_0 t)\bullet\cos(\Delta\omega_0 t) \end{aligned}$$

とも表現出来る。



右の図は (1) 式を図に表している。細かい振動が (1) 式の平均振動数 $\sin(2\pi f_0 t)$ を表し、$\cos(2\pi\Delta f t)$ はうなりの振動で、図の包絡線に相当している。sin の平均振動数が主の音程で、cos成分が主の音の振幅に強弱を付けるために「うなり」になる。このうなりに注意すると、異なる楽器間の音程を正確に合わせることが出来る。

演習問題

１）右向きの進行波 $y(t,x) = A\sin\left\{\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right\}$ が壁で反射されて、左向きの進行波として進んでいった。

ア）右向き進行波が時間と共に進んでいく様子を $\Delta t = \lambda/3v$ 毎にグラフに書き表わせ。

イ）反射した波の位相が入射波と変らないとした時の反射波（左向きの進行波）の様子をグラフに書き表せ。

ウ）入射波（右向き進行波）と反射波（左向き進行波）の重ね合わせ（足し算）を、$\Delta t = \lambda/3v$ の時間毎にグラフに書き表せ。

エ）その様子を式で再現しよう。右向きの進行波 $y_{Right}(t,x) = A\sin\left\{\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right\}$ と、$x=0$ の壁で発生した左向きの反射波 $y_{left}(t,x) = A\sin\left\{\omega\left(t + \dfrac{x}{v}\right)\right\}$ を重ね合わせて、定在波（弦の振動のように、時間と共に進行しないで、同じ場所で振動する波）になることを示せ（図５参照）。

オ）反射するときに、位相が反転し、$y_{left}(t,x) = -A\sin\left\{\omega\left(t + \dfrac{x}{v}\right)\right\}$ となったとしよう。このときの定在波はどうなるか求めよ（図３参照）。