

## 斜面の転がり競争

斜面を、異なる慣性モーメントを持つ回転体が転がる場合に、速く転がり落ちるのはどのような形状だろうか。ここでは、円筒、円柱、球、球殻などを考えよう。

転がり落ちた結果、高さ  $h$  だけ下った位置における速度を比較する。

もっとも簡単な方法はエネルギー保存則を用いる方法である。

位置エネルギー  $Mgh$  が、重心の並進運動の運動エネルギー  $Mv_G^2/2$  と回転のエネルギー  $I\omega^2/2$  の和に等しいことが、エネルギー保存則から要請される。

$$Mgh = \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

この時に、滑らずに回転する条件は重心の速度  $v_G = b\omega$  である。また、慣性モーメントは係数  $k$  を用いて  $I = kMb^2$  と表される。これらの関係を代入して、

$$Mgh = \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{kMv_G^2}{2} = \frac{M}{2}(1+k)v_G^2$$

が得られる。速度  $v_G$  について解くと、

$$v_G = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$$

となる。 $k = 0$  の場合は、自由落下に等しい。

種々の形状について  $k$  の値を整理すると、

円筒：  $k = 1$

円柱：  $k = 1/2$

球：  $k = 2/5$

球殻：  $k = 2/3$

となっている。これより、容易に転がり落ちる順番を知ることができる。

容器の中に自由な水が入れている場合は、容器の回転に伴う回転をしないため、水の  $k$  は 0 と考えて良い。