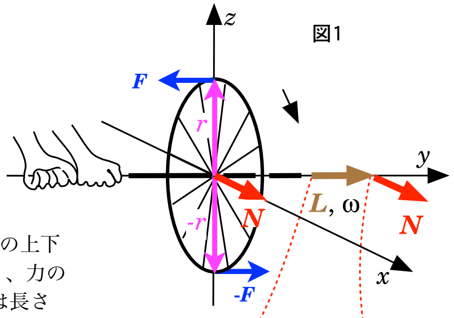
回転の運動方程式の実例

1.車輪の実験



時計方向に回転している自転車の車輪の軸を、図１のように傘をさすように持上げて y-z 面内で回転軸を傾ける．車輪の中心位置を原点に固定して考えれば、図１中の y 軸に平行な２つの力 $\boldsymbol{F}$ と $-\boldsymbol{F}$ が車輪の上下に働くことと等価である．そうすると、力のモーメント $\boldsymbol{N}=2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ が加わる．$\boldsymbol{N}$ は長さ $2\boldsymbol{r}$ と力 $\boldsymbol{F}$ の外積なので、図１に書かれているように、両方のベクトルに垂直で、x 軸に平行になる（2つあるのは始点を移動して書いてある）．

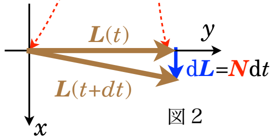


図２

回転の運動方程式 $d\boldsymbol{L}/dt=\boldsymbol{N}$ によると、回転軸に平行な角運動量 $\boldsymbol{L}$ は時間と共に $\boldsymbol{N}$ の方向に向きを変えていく．（図２のように、$d\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}dt$ というベクトルが、角運動量 $\boldsymbol{L}$ に加えられていく）その結果、上に差し上げたはずなのに、車輪は右 ($\boldsymbol{N}$) 方向に回転して行くことになる．

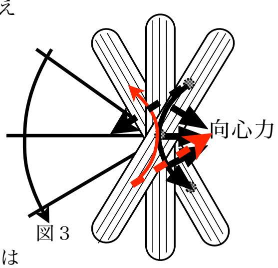


図３

この点を、向心力で理解してみよう．図３は車輪を差上げる様子を原点で固定して、真横から見た模式図である．車輪の手前側の一点に注目すると、差上げるにつれて角度が変るが、その点は、その間の車輪の回転のために下方に移動する．その軌跡を結んでやると、図３の曲線で表された円弧上の軌道を動いていることが分る（赤線は車輪の反対側の点）．円弧状を運動するためには向心力が無くてはいけないが、ぶれないように手でしっかり持っていればその力が向心力の役目をする．しかし、手で支えている力が十分でないと、円弧状を動かず、真っ直ぐ破線の方向に進むことになる．そうすると、車輪は右側に回転していくだろう．

これらの回転力が、図１の力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の効果に対応していることを各自で確かめて欲しい．

2.コマはどうして倒れないか

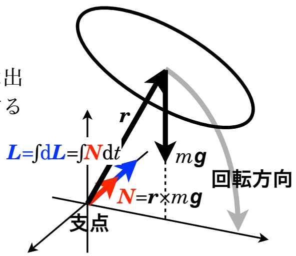


図4-1 **回転してない** ($\boldsymbol{L}(0)=0$)
コマは重力によって倒れる。

回転していないコマを一寸傾けた状態で止めることは出来ない．ところが、回転しているコマは首振り運動はするが、ほぼ一定の角度を保っていることが出来る．これは何故だろうか．どちらの場合も、コマは運動方程式に従って運動する、表現を変えると、ニュートンの運動方程式はコマの運動を大変巧く再現できる．

回転していないコマが倒れてしまうのは、勿論、重力が働いているため。コマの支点上に重心が来なければ、重力によって作られる力のモーメント $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{g}$ が発生する．回転の運動方程式 $d\boldsymbol{L}/dt=\boldsymbol{N}$ に従って、角運動量 $L=\int dL=\int Ndt$ が時間と共に成長する．$\boldsymbol{L}(0)=0$ なので常に $\boldsymbol{L}\,//\,d\boldsymbol{L}\,//\,\boldsymbol{N}$ から、

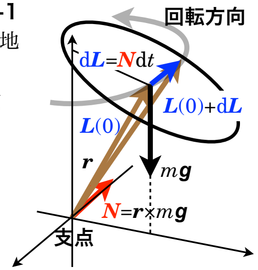


図4-2 **回転している** ($\boldsymbol{L}\neq 0$)
コマは重力では倒れない。

$\boldsymbol{L}$ の方向は力のモーメント $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{g}$ と平行になり、**図4−1** の様に、**回転していない**（時刻 0 の時に、$\boldsymbol{L}(0)=0$）**コマ**は地面に向って回転して倒れていく事になる．

一方、**回転しているコマ**の場合は力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は同じだが、元々コマの回転による角運動量 $\boldsymbol{L}(0)\neq 0$ があるので、単純に力のモーメント $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{g}$ の方向ではなく、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(0)+\int\boldsymbol{N}dt=\boldsymbol{L}(0)+\int d\boldsymbol{L}$ に従って変化する．ここで、$\boldsymbol{N}$ が $\boldsymbol{r}$ と $m\boldsymbol{g}$ に垂直なので、$\boldsymbol{L}$ (// $\boldsymbol{r}$) にも垂直な $d\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}dt$ の方向に変化する．結果として、**図4−2**の様に角運動量ベクトルの長さは一定のまま鉛直軸の周りに回転を始める（歳差運動）．従って、コマが回転軸の周りの角運動量 $\boldsymbol{L}(0)\neq 0$ を持つ限り、倒れずに首振り運動を続ける．実際にはコマと地面の間の摩擦のために、コマの回転を遅くする方向に力のモーメントが生じ、コマの角運動量ベクトルの長さが徐々に短くなる．そうすると**図５**に示す様に同じ力のモーメントが働いても回転角度が大きくなり、歳差運動がだんだん早くなっていく．

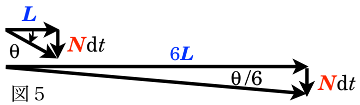


図５

３．自転車は何故手放し運転が出来るか

曲芸師さんなら可能かもしれないが、まさか、止っている自転車に手放しで乗れる人はいないだろう．しかし、走っている自転車なら、少し練習すれば誰にでも乗れるようになる．これも、回転の運動方程式 $d\boldsymbol{L}/dt=\boldsymbol{N}$ で説明される．その原理は２番のコマが倒れない理由と同じである．

車体が傾くと、重力によって傾斜に応じた力のモーメント $\boldsymbol{N}$ が生じ、角運動量 $\boldsymbol{L}$ を変化させようとする．その時の力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の方向を考えて見よう．図１は、紙面の奥から手前に走っている自転車の回転と同じである．働いている力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は、車体が進行方向に向って右側に傾いている時に、重力の作る力のモーメントに対応している．この向きは、自転車のハンドルを右に切った時の回転軸の変化と同じである．即ち、車体を進行方向に向って右に傾けると、倒れないように？ちゃんとハンドルが右に切れてくれるわけである．そのお陰で、多少ふらついても、ペダルさえしっかり漕いでやれば、自転車は倒れずに手放しで走り続けられる（はずである）．

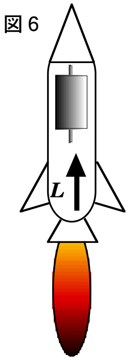
４．ジャイロ

このような回転体の応用は色々ある．例えば、客船が外洋に出ると、波のために揺れて船酔を起す原因になる．その対策として、船の中に大きな角運動量 $\boldsymbol{L}$ を作っておけば、波による外力が力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を作っても、図５の様に力のモーメントによる角運動量の変化、即ち、船の揺れを小さく抑えることが出来る．実際に、大きなフェリー船などにも大きなはずみ車のようなジャイロが設置され、揺れを抑える働きをしている．

５．人工衛星、ハッブル望遠鏡

人工衛星の打ち上げは考えるほど簡単ではない．ちょっとした風や、ロケットエンジン出力のバランス、積み荷のバランスなどで飛行方向が影響される．前項の「ジャイロ」はロケットには欠かせない重要な装置である．高速回転するジャイロの角運動量がロケットの進路を安定させてくれる．

図６



宇宙の天体望遠鏡、ハッブル望遠鏡は、地球大気の揺らぎの影響を避けて高い分解能を実現している．この時にも、ジャイロは重要な役割を担う．地球を周回運動するハッブル望遠鏡に働く力は重力のみである．重力はジャイロの角運動量 L を変化させるような力のモーメント N を作らないので、角運動量保存則の御利益を十分に受けられる．地上に固定されていないので、地球の自転の影響も無いため、地上では不可欠の赤道儀架台も不要である．ハッブル望遠鏡は、角運動量保存則のおかげで、常に宇宙の一点を見つめる事が出来る．

しかも、好都合なことに、望遠鏡で狙う天体を変更する際にも、角運動量は操作を容易にしてくれる．角運動量がない時には、方位変更用のロケットを噴射すると望遠鏡が回転運動を始めるが、希望の方位で止めるには厳密に調整した逆噴射を行う必要がある．速度、角速度をピッタリとゼロにすることが出来ないと、高い分解能を保つことは出来ない．ところが、角運動量を持っていると、力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を作る噴射をしてやれば、噴射時間に比例した角度だけ角運動量の（すなわち望遠鏡の）方位が変化して、しかも噴射を止めると、ピタッとその方位で止まってくれる．回転の運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ から分るように、$\boldsymbol{N}$ がゼロになると、もう $\boldsymbol{L}$ は変化しない（$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=0$、すなわち、$\boldsymbol{L}$=一定）．並進運動の場合でも、$\boldsymbol{F}$ がゼロになると運動量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ が変化をしなくなるが、速度 $\boldsymbol{v}$ でそのまま並進運動を続けてしまう．角運動量が変化しないときとは違って、空間的に静止はしない．この様に、宇宙での角運動量の御利益は大きい．

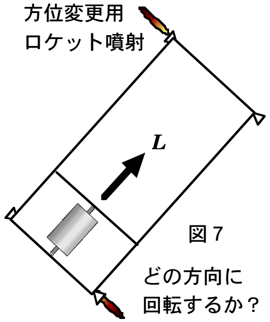


図７

６．てこの原理

回転の運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ は、てこの原理が成り立つことを保証してくれる．てこが図８の様に釣り合っている（角運動量 $\boldsymbol{L}=0$ で一定値を保つ）．この時、回転の運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ から、合計の力のモーメント $\boldsymbol{N}$ がゼロになっていることが保証される．すなわち、 $N=-l_1F+l_2Mg=0$ が成り立っている．従って、 $F=\frac{l_2}{l_1}Mg$ となり、l_1 を長くすれば Mg を持ち上げるために必要な力 $\boldsymbol{F}$ は、いくらでも小さくできる．

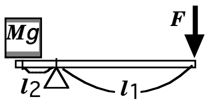


図８

７．フィギュア・スケート

冬のオリンピックの種目の中でもフィギュアスケートはその花形の一つである．フィギュアスケートの選手の華麗な滑りを見ているときに、つま先立ちで自転する場面に出合う．始めは、手をいっぱいに広げてゆっくり回転していて、途中で手を胸に引き寄せると、回転速度が著しく速くなる．この理由は、どのように理解できるのだろうか．

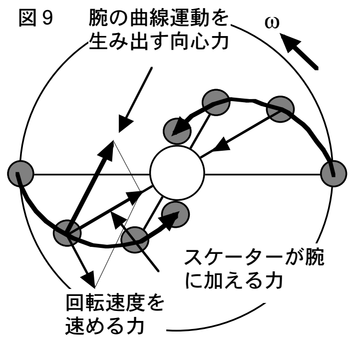
ここでも、回転の運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ が活躍する．選手が自転しているときの空気摩擦や氷との摩擦は短時間では無視できる．従って、手を縮めた結果として回転数が上がる際には、選手の角速度を変える原因になる力のモーメントを生む **外力** は働いていないと考えて良く、回転の運動方程式から、角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I}\omega$ が保存する（時間が経過しても変化しない）と期待される．すなわち、選手が手を縮めた結果、慣性モーメント $\boldsymbol{I}$ が減少して角速度 ω が大きくなったと理解される．

さて、この時に回転のエネルギーは変化するのだろうか．

回転のエネルギーは $E=\frac{1}{2}I\omega^2$ で与えられるので、手を縮める前のエネルギー $E_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ を用いて、手を縮めた後のエネルギー $E_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ を表してみよう．角運動量が保存しているので、$I_1\omega_1=I_2\omega_2$ より $\omega_2=\frac{I_1}{I_2}\omega_1$ が得られ、求めるエネルギーは $E_2=\frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)I_1\omega_1^2$ となる．$\frac{I_1}{I_2}>1$ なので、手を縮めたことにより、回転のエネルギーが増加したことが分る．さて、このエネルギーの増分はどの様に供給されたのだろうか．

図９に、回転する選手を上から見た模式図を示す．外から観測すると、腕を縮める力が腕の運動方向とは一致していない事がわかる。腕を縮める力は、腕先の曲線運動を生み出す向心力成分と共に、回転速度を速める回転の接線方向成分も与えている．両腕の回転速度を速める力が作るモーメント $\boldsymbol{N}$ の方向が、角運動量の方向と平行であることは容易に確かめられる．また、腕を縮める速さが速いほど、加速する力も大きくなる。この時に、腕に加える力は腕の位置ベクトルに常に平行なので、角運動量を変化させることはない．

図９



8.立てかけた棒の釣合

図１０のように、長さ ℓ の真っ直ぐで一様な棒が、床に角度 θ だけ傾けて壁に立てかけられている．棒の中心にある重心 G に重力 mg が働く．この棒の運動を考えるには、重心の並進運動と、その周りの回転運動を考える必要がある．

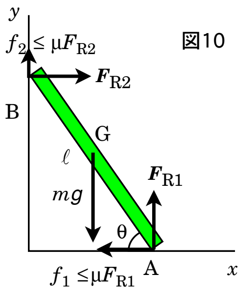


図10

$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = \sum \boldsymbol{F}$　（重心の並進運動の方程式）

$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\dfrac{d\omega}{dt} = \sum \boldsymbol{N}$　（重心の周りの回転運動の方程式）

　まず、並進運動は、働いている力の合力に比例して速度、或いは、運動量が変化する．力の合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ は、抗力 $\boldsymbol{F}_{Ri}$, と摩擦力 $\boldsymbol{f}_i$, および重力 mg の和で、x, y 成分毎に書くと、

$F_{\mathrm{T},x} = F_{\mathrm{R2}} - f_1,\qquad F_{\mathrm{T},y} = F_{\mathrm{R1}} + f_2 - mg$　　(8-1)

で与えられる．釣り合っていて静止しているときには、

$F_{\mathrm{R1}} = mg - f_2,\qquad f_1 = F_{\mathrm{R2}}$　　(8-2)

が成り立つ．

　つぎに、回転運動の釣合について考えよう．力のモーメントの合計 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{T}}$ は z 成分（紙面裏から手前方向）のみで、釣り合って静止している場合は、丁度ゼロになっている．支点を A にとると（勿論、どこに支点をとっても結果は変わらない）、

$N_{\mathrm{T},z} = \dfrac{\ell}{2} mg\cos\theta - \ell F_{R2}\sin\theta - \ell f_2\cos\theta = 0$

（G を支点に取ると、$\dfrac{\ell}{2}F_{R1}\cos\theta = \dfrac{\ell}{2}f_1\sin\theta + \dfrac{\ell}{2}F_{R2}\sin\theta + \dfrac{\ell}{2}f_2\cos\theta$ ）

となるので、F_{R2} について解くと

$F_{R2}\tan\theta = (\dfrac{mg}{2} - f_2)$ 、　したがって　$\tan\theta = \dfrac{(1-2f_2/mg)}{2F_{R2}/mg}$　　(8-3)

となる．条件式の数は(8-2)と(8-3)の３つ有るが、未知数の数が $f_1, f_2, F_{\mathrm{R2}}, F_{\mathrm{R1}}$ と４つ有るため、全ての未知数を決定することはできない．

　θ を徐々に小さくしていくと、θ_c で棒が滑り始める．それは、２つの摩擦力 f_1, f_2 両方が最大摩擦力に到達したときに相当する．摩擦係数 μ_i を使って $f_i = \mu_i F_{Ri}$ の条件式が増えるので、(8-2) から得られる

$F_{\mathrm{R1}} = mg - \mu_2 F_{\mathrm{R2}},\qquad \mu_1 F_{\mathrm{R1}} = F_{\mathrm{R2}}$

を使って $F_{\mathrm{R1}}, F_{\mathrm{R2}}$ について解くことが可能になる：

$F_{R1} = \dfrac{mg}{(1+\mu_1\mu_2)},\qquad F_{R2} = \dfrac{\mu_1 mg}{(1+\mu_1\mu_2)}.$　　(8-4)

これらを(8-3)に代入して、滑り出す角度 θ_c を求めることができる：

$\tan\theta_c = \dfrac{(1-\mu_1\mu_2)}{2\mu_1} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\mu_1} - \mu_2).$　　(8-5)

この式によると、μ_1 がゼロの時には、いくら μ_2 が大きくても滑って倒れてしまう．しかし、μ_1 が有限で有りさえすれば、μ_2 がゼロであっても滑らない角度範囲があることが分る．そこで、あらかじめ μ_2 をゼロ、即ち $f_2 = 0$ と置いてやると、これらの式はずっと簡単になる．

9.ヨーヨーの運動

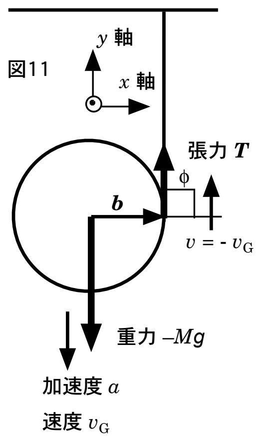


図11

図１１は、一様な円柱で出来たヨーヨーの模式図である．ここでも回転運動と並進運動の両方程式を考える．

$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\dfrac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = \sum \boldsymbol{F}$　（重心の並進運動の方程式）

$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \sum \boldsymbol{N}$　（重心の周りの回転運動の方程式）

ヨーヨーに働く力の合力は y 成分のみである：

$F_{\mathrm{T},y} = T - Mg$

　一方、重心の周りの回転をきめる力のモーメントの合計は

$N_{\mathrm{T}} = bT\sin\phi = bT$　　(9-1)

なので、２つの運動方程式は次式で表される．

$M\dfrac{dv_G}{dt} = T - Mg,$　　(9-2)

$I\dfrac{d\omega}{dt} = bT.$　　(9-3)

そこで、$\omega = \dfrac{v}{b}$（$v = -v_G$）と $I = \dfrac{Mb^2}{2}$（円柱の慣性モーメント参照）を(9-3) に代入して

$\dfrac{M}{2}\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{M}{2}\dfrac{dv_G}{dt} = T$　　(9-4)

となる。(9-4) は張力が働く点の円周の速度ベクトル v と重心の速度ベクトル v_G が常に反平行であることを反映する。(9-4) を (9-2) と連立させると、張力と落下の加速度が

$T = \dfrac{1}{3}Mg$, $a = -\dfrac{2}{3}g$　（運動方程式はそれぞれ $\dfrac{dv_G}{dt} = -\dfrac{2}{3}g$, $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{bMg}{3I} = \dfrac{2g}{3b}$ となる）

と求まる．ヨーヨーの落ちる加速度が重力加速度の 2/3 になっていることが分る．

　さて、エネルギーは並進運動と回転とでどの様に分配されるか見てみよう．並進運動は

$E_T = \dfrac{1}{2}Mv_G^2$

で、回転運動は

$E_R = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Mb^2}{2}\dfrac{v_G^2}{b^2} = \dfrac{1}{4}Mv_G^2 = \dfrac{E_T}{2}$

なので、並進運動の半分が回転に使われている．

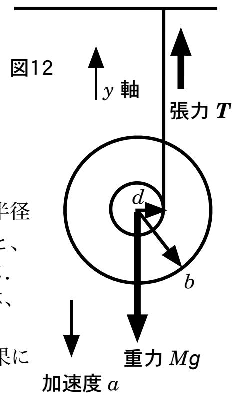


図12

演習問題

図１２のように、　通常のヨーヨーは糸が巻かれている部分の半径が d と細くなっている．このヨーヨーの落下する際の加速度 a と、並進運動と回転運動それぞれのエネルギーの比、$E_{\mathrm{R}}/E_{\mathrm{T}}$ を求めよ．ただし、ヨーヨーの質量は一様とし、慣性モーメントの計算では、全て半径を b として良い（半径 d の細い部分は無視して良い）．

　なお、ヨーヨーの厚み w をあらわには考慮していないが、結果には影響しないことを確かめよ．

　また、図１１において、ヨーヨーが円柱でなく、円筒であったらどの様に変るか．

10.斜面を転がりおりる回転体

半径が b の球、円柱（中が詰っている）、円筒（皮のみの筒）などの回転体が滑らずに転がる運動は、９．のヨーヨーの運動と全く同様に解析することが出来る．ヨーヨーの張力に相当するのが、斜面から受ける摩擦力 $\boldsymbol{f}$ に当る．この時に、転がり摩擦は静止摩擦力よりも十分に小さいと考えることによって、摩擦による運動エネルギーの損失は無視する．

そうすると、運動方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}=f-Mg\sin\theta \qquad (10\text{-}1)$$

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=bf \qquad (10\text{-}2)$$

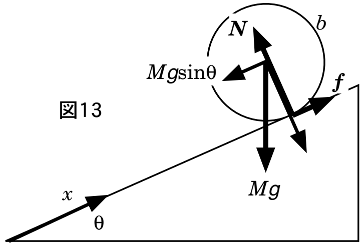


図13

と書ける．つぎに、$\omega=\frac{v}{b}$ と $I=kMb^2$ （k は慣性モーメントの係数で、球 (k=2/5)、球殻 (k=2/3)、円柱 (k=1/2)、円筒 (k=1)）を (10-2) に代入して得られる

$$kM\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kM\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}=f$$

(滑らないという条件は、v_G による接地点の移動を周速度 $-v_G$ で引き戻す事を意味する）を (10-1) と連立させ

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}=-\frac{g\sin\theta}{1+k},\quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{kbMg\sin\theta}{(1+k)I}=\frac{g\sin\theta}{(1+k)b} \qquad (10\text{-}3)$$

を得る．(10-3) 式が示すように、重心の落下加速度は k に依存する．球の場合 $\frac{5g\sin\theta}{7}$、円柱で $\frac{2g\sin\theta}{3}$、そして円筒が最も小さく、$\frac{g\sin\theta}{2}$ となることが示せる．(10-3) 式の加速度には、回転体の大きさ b や質量 M を含まず、k のみ含むことに注意しよう．慣性モーメントの比例係数 k が等しければ、大きさや質量には関係なく等しい加速度を受ける．

蓋のある円筒に水などを満たすと、水は円筒との摩擦力が小さいためにほとんど回転しない．即ち、水は慣性モーメントに寄与しないため、滑らかな面を滑り落ちる質点の場合（$k=0$）に近い運動をする．水の質量を M、缶の質量を m（但し、$M>>m$）とすると、慣性モーメント I は $k_{eff}M_{total}b^2=k_{eff}(M+m)b^2\approx mb^2$ （質量 m の円筒のみが慣性モーメントに寄与する）と書けるので、

$$k_{eff}=\frac{m}{M+m}\approx\frac{m}{M}<<1$$

と、k を非常に小さくできる．

これらの関係を、各自、適当な回転体を使って確かめてみよう．（例：中身の入った缶ジュース、中身を凍らした缶ジュース、空の缶）

高さ h で静止していた回転体が転がり落ちると、力学的エネルギー保存則は、

$$Mgh=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{k}{2}Mv_G^2$$

と表せるので、円筒では並進運動と回転運動に１対１の割合でエネルギーが分配される．これらの回転体の中では、回転運動の割合が球で最も小さく、５対２になる．

11.実体振子

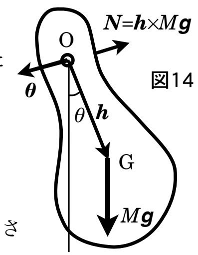


図14

実体振子とは、図１４に示すような剛体内の点 O を回転軸とした振子のことである．振子の回転軸の位置が固定されているので、運動方程式は点 O の周りの回転のみを考えればよい：

$$I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}=N=-hMg\sin\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{Mgh}{I}\sin\theta.$$

ここで、右辺のマイナス記号は、常に点 O の周りの角度 θ を減少させる方向に重力の作る力のモーメント $\boldsymbol{N}$ が向いていることを示す．

単振子の時と同様に、θ が 1 (rad) よりも十分に小さい極限を考えると、sinθ は θ で近似できるので、運動方程式は、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{hMg}{I}\theta=-\omega_0^2\theta,\qquad \omega_0=\sqrt{\frac{hMg}{I}}$$

となる．この運動方程式（変数 θ の２階微分方程式）の一般解は、２つの積分変数を含む．また、２階微分すると、元に戻って負の符号が付くことから、三角関数で書ける：

$$\theta(t)=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t=A'\cos(\omega_0 t+\beta).$$

この一般解は、どんな初期条件であっても、その初期条件を満足する A, B, A', β を決めてやれば、その運動を表す解（特解）を与える．

振動の周期は

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

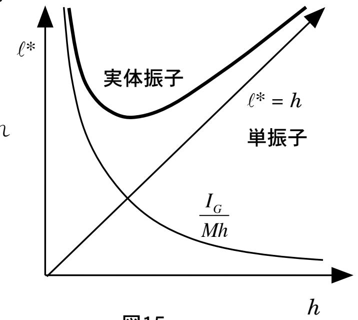


図15

となり、単振動の周期 $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ と比較すると、実体振子の有効振子長 ℓ^* は

$$\ell^*=\frac{I}{Mh}=\frac{I_G}{Mh}+h$$

で与えられる．ここで、点 O の周りの慣性モーメントが

$$I=I_G+Mh^2$$

と与えられることを使った．なお、I_G は重心を通る回転軸の周りの慣性モーメントを表す．ℓ^* は相当単振子の長さと呼ばれ、h と $1/h$ を含むので、図１５に示すように、最小値を持つ．h が短い時に ℓ^* が長くなる理由は、単振子の時のように、振子の長さを短くすると慣性モーメントも一緒に小さくなっていかず、一定値（重心の周りの慣性モーメント I_G）になってしまうためである．

12.コマの歳差運動の周期

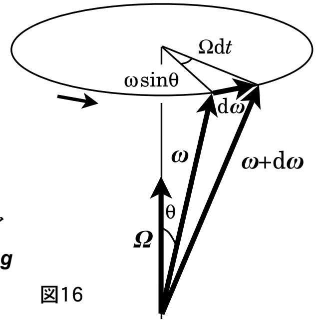


図16

回転しているコマは、重力が働いても倒れずに歳差運動（首振り運動）をすることを２．で見た．さて、歳差運動の速さは何で決っているのだろうか．

ω はコマの回転の角速度ベクトル、Ω は歳差運動の角速度ベクトルを表している．コマが鉛直軸から θ だけ傾いている．重力による力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は、コマの接地点から重心に引いた位置ベクトル $\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ と重力 $m\boldsymbol{g}$ の外積だから、$MgR_{\mathrm{G}}\sin\theta$ と書けるので、運動方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=N=MgR_{\mathrm{G}}\sin\theta$$

となる．また、$\mathrm{d}t$ の間の ω の変化量、dω は、図１６より、$\mathrm{d}\omega = (\omega\sin\theta)\,\Omega\,\mathrm{d}t$, すなわち

$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Omega\omega\sin\theta$ となるので、歳差運動の角速度 Ω は、

$I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\Omega\omega\sin\theta=MgR_{\mathrm{G}}\sin\theta$　より、

$\Omega=\dfrac{MgR_G}{I\omega}=\dfrac{N_0}{L}$　$(=\dfrac{R_G}{kb^2\omega}$、$b$ はコマの半径、k は慣性モーメント $I=kMb^2$ の係数）

となり、コマの軸の傾き θ には依存しない事が分る．歳差運動の周期 T_Ω は $\dfrac{2\pi}{\Omega}$ だから、

$$T_\Omega=2\pi\frac{L}{N_0}=2\pi\frac{kb^2\omega}{R_G}$$

で与えられる．予想されるように、重心が低く（N_0, R_{G} が小さい）、コマの回転が速い（L, ω が大きい）ほど、そして、k（慣性モーメントの比例係数：円筒が 1、円柱では 0.5、１０．を参照）が大きいほど、歳差運動はゆっくりになる．

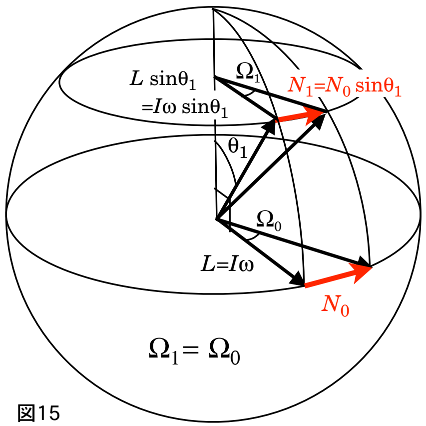


図15