相対座標の具体例

連星

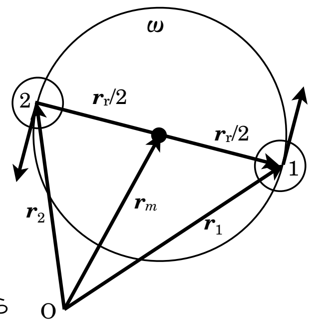
互いの周りを公転する、ほぼ同一の質量を持つ２つの星を連星と呼ぶ。

ここでは、等しい質量 m を持つ連星の運動を考える。2つの星を結ぶ相対座標ベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{r}$ の運動は換算質量 m_eff を用いて

$$m_{eff}\frac{d^2\boldsymbol{r}_r}{dt^2}=\boldsymbol{f}_{12}、\qquad m_{eff}=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

で与えられる。m_1=m_2=m なので m_eff=m/2 より、

$$\frac{m}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}_r}{dt^2}=\boldsymbol{f}_{12} \quad (1)$$



で、質量中心ベクトルは $\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{r}_m(t)-\dfrac{m_1}{M}\boldsymbol{r}_r(t)$（質点系の運動方程式のプリント 8(b)式）を用い、$\boldsymbol{r}_\mathrm{m}$=$\boldsymbol{r}_2$+$\boldsymbol{r}_\mathrm{r}$/2 が得られ、2つの星を結ぶベクトルの中央に位置する。

　最初に連星の重心の周りを公転する2つの星として考えよう。

質量中心を原点に取ると、２つの星はそれぞれ半径 $\boldsymbol{r}_\mathrm{r}$/2 の軌道上を上図の様に互いの万有引力 $\boldsymbol{f}_{12}$（ $\boldsymbol{f}_{21}$）が向心力となる円運動をする（円運動をしないと万有引力に引きつけられて互いに衝突してしまう）。この場合、向心力が常に加わり加速度運動をするそれぞれの星の上で観測すると、この万有引力が、加速度系の見かけの力である遠心力とつり合い、その星の重力のみが働いている様に見えるであろう。

　その時の遠心力の大きさは、

$m(r_r/2)\omega^2$ （= f_{12}）

で与えられる。この運動は観測の仕方にはよらないので、星２に原点を定めて星１を観測した時にも成り立っている。それを確認するには相対座標の運動方程式 (1) を使う。

　原点を、連星の重心から星2の重心へ変更しても変化しない物理量は、それぞれの質量 m、 公転の角速度 ω、そして互いに働く万有引力 f_{12} とそれに等しい大きさを持つ遠心力 $m(r_r/2)\omega^2$ である。

　一方、変化するのは連星の重心を原点とした円運動の軌道半径 $\boldsymbol{r}_\mathrm{r}$/2 が、星２から測った星２の軌道半径 $\boldsymbol{r}_\mathrm{r}$、及び、見かけの質量 m => m_eff = m/2 である。

　これらの変化を適用した結果、遠心力は $m(r_r/2)\,\omega^2$ から $m_\mathrm{eff}\,\boldsymbol{r}_\mathrm{r}\,\omega^2$ に変わるが、どちらも同じ大きさ $mr_r\omega^2/2$ を持つ事が確認できる。これが換算質量が (1) 式に現れる意味である。

相対座標と親子ボール

前期の授業では、親子ボールの運動を運動量とエネルギーの２保存則を元に解析してきた。ここでは、相対座標の考え方を用いて考えよう。

　親ボールが床に衝突した直後を考える（下図中央）。

重心の座標

$\boldsymbol{r}_m=\dfrac{M\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{M+m}$ を使って２つのボールの運動方程式が

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}+m\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}=(M+m)\frac{d^2\boldsymbol{r}_m}{dt^2}=(M+m)\frac{d\boldsymbol{v}_m}{dt}=\boldsymbol{F}$$

と書ける。M>>m の条件下では $\boldsymbol{r}_m\approx\boldsymbol{r}_1$ より重心の速度は $\boldsymbol{v}_m\approx\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}$ となる。

相対座標を $\boldsymbol{r}_r=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ と定義しボール１の重心を原点に取る。$m_\mathrm{eff}=\dfrac{Mm}{(M+m)}$ より

$m_\mathrm{eff}\,d^2\boldsymbol{r}_r/dt^2=\boldsymbol{f}_{12}$ 、 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_m+(m/(M+m))\boldsymbol{r}_r\approx\boldsymbol{r}_m$、 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_m-(M/(M+m))\boldsymbol{r}_r\approx\boldsymbol{r}_m+\boldsymbol{r}_r$

と表せる。従って、ピンポン球の衝突後の速度は $\boldsymbol{r}_2$ を時間で微分して、

$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_m+\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r$

になる。テニスボールとピンポン球はどちらも速さ v で正面衝突なので、 衝突直前のテニスボール（≈ 重心）に対するピンポン球の相対速度は $-2v$ で、弾性衝突後は $2v$ になり、結局、

$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}$

と得られる。