質点系と剛体の運動

1ないし2個の質点の運動は、ニュートンの (連立) 運動方程式を直接解いて求めることが出来る。しかし、それ以上の数の質点の運動は、原理的には運動方程式を連立させればよいが、現実的には、剛体のように質点間の互いの位置関係が固定されている場合を除くと、解析的な取り扱いが困難であり、コンピューターを使って数値的に解く必要がある。

質点系の運動方程式は、

1）質量中心（重心）の運動

2）相対座標の運動

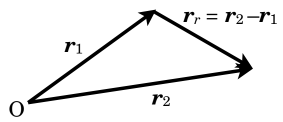
の2つの運動に分けて考えることが出来る。質点系の重心の運動は、質点と同じ通常のニュートンの運動方程式に従う。地球と月からなる2質点系の重心は太陽の周りを公転運動をする。一方、その2質点系の重心の周りを地球と月が公転運動するのは相対座標の運動になる。

1）質量中心（重心）の運動

2つの質点、1と2の運動方程式を考えよう。

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{F}_1, \quad (1a)$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{F}_2, \quad (1b)$$



ここで、$\boldsymbol{f}_{ij}$ は両質点間に働く内力（地球と月の万有引力）で、$\boldsymbol{F}_i$ はそれぞれに働く外力（太陽の万有引力）をあらわす。ニュートンの第3法則、作用反作用の法則により、$\boldsymbol{f}_{12}$ = -$\boldsymbol{f}_{21}$（具体的には相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_r = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ と置くと、$\boldsymbol{f}_{12} = (\boldsymbol{r}_r/r_r)\, Gm_1m_2/r_r^2$、$\boldsymbol{f}_{21} = (-\boldsymbol{r}_r/r_r)\, Gm_1m_2/r_r^2$、ここで G は万有引力定数）より、両式の和を取ると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}, \quad (2)$$

となる。ここで、2質点の質量中心の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_m$ は、全質量 M を使って、

$$\boldsymbol{r}_m = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M}, \quad (3)$$

と書けるので、

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_m}{dt^2} = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{d\boldsymbol{P}_m}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad (4)$$

となる。外力のベクトル和 $\boldsymbol{F}$ がゼロであれば、質点系の全運動量 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ は保存する。 この結果は、もっと一般的に n 個の粒子からなる系にも適用できる。

結局、質点系の重心の運動は、外力のベクトル和 $\boldsymbol{F}$ が質点系の重心に働くとして、通常のニュートンの運動方程式で表せる。

２）相対座標の運動Ｉ：相互作用する２質点

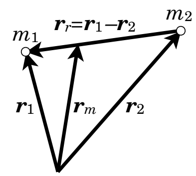
相対運動は、簡単のために、一定の加速度場（例：重力場、近似的に太陽の重力場中の地球と月の運動があてはまる）中の場合のみを考えると、運動方程式は、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{f}_{12}}{m_1} + \frac{\boldsymbol{F}_{S1}}{m_1} = \frac{\boldsymbol{f}_{12}}{m_1} + \boldsymbol{a}_S, \quad (5a)$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{f}_{21}}{m_2} + \frac{\boldsymbol{F}_{S2}}{m_2} = \frac{\boldsymbol{f}_{21}}{m_2} + \boldsymbol{a}_S, \quad (5b)$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{a}_S$ は太陽の重力場による加速度の大きさを表す。これらの差を取り、$\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 、$\boldsymbol{f}_{12} = -\boldsymbol{f}_{21}$ を用いると、質点２から観測した質点１の相対座標の運動方程式が、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_r}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{f}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{f}_{21}}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}\boldsymbol{f}_{12}, \quad (6)$$



と書ける。ここで、換算質量 $m_{eff} = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ を用いると

$$m_{eff}\frac{d^2\boldsymbol{r}_r}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{12}, \quad (7)$$

となる。すなわち、$\boldsymbol{r}_2$ を原点として観測した $\boldsymbol{r}_1$（質点1）の運動は、換算質量 m_{eff} を持つ質点1に万有引力が働く場合の運動方程式によって表される事が分かる。結局、$\boldsymbol{r}_m = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を使って、両質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_m(t) + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}_r(t), \quad (8a)$$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{r}_m(t) - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}_r(t), \quad (8b)$$

と表される。

課題：

(1) 質量中心 $\boldsymbol{r}_m$ が重心 $\boldsymbol{r}_G$ に等しいことを示せ（$\boldsymbol{r}_m$ で支えた時に静止状態から回転を始めなければ重心)。

(2) (8) 式が成り立つことを示せ。

(3) 地球と月の場合に地球から見た月の換算質量 m_{eff} を求めよ。また、質量中心 $\boldsymbol{r}_m$ はどの辺りにあるか。地球の質量 M は 4.5×10^{24} kg、月の質量 m は 9.6×10^{22} kg、地球の半径は 6.4×10^{3} km、月の半径は 1.7×10^{3} km、地球と月の中心間の距離は 3.8×10^{5} km とせよ。