13. 慣性モーメントの計算

質量 M の質点が半径 b の円運動をする場合の慣性モーメントは、定義から$I=Mb^2$ である (図16)。一方、剛体の場合は回転軸からの距離 r が分布しているため、各部の寄与を足し合わせなければならない (図17)。簡単のために一様な剛体を考え、回転軸を z 軸として和および積分で表すと、

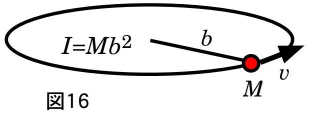

図16

$$I=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i({x_i}^2+{y_i}^2)=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m=\iiint_V(x^2+y^2)\frac{M}{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (13\text{-}1)$$

となる．M は全質量、V は全体積で、M/V は密度．

以下に対称性が高く計算が容易な例について見てみよう．その際に、全質量は常に M、回転軸からの最大半径は b で共通とする事により、形状の違い（質量の分布の仕方）がどの様に慣性モーメントの大きさに影響をするかを見ることが出来る．その指標として、質点の場合の慣性モーメント $I=Mb^2$ にかかる係数 k を考える：$I=kMb^2$．ここで、慣性モーメントは質点の場合に最大になるので、$0\le k\le 1$ である．

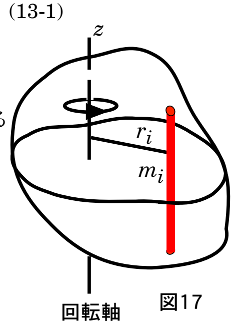

図17

A) 一様な細い棒 - 端の回転軸（$k=1/3\approx 0.33$）

図１８の様な棒の慣性モーメントは、回転軸から距離 x だけ離れた位置の長さ dx の微小部分の慣性モーメントを、棒全体にわたって足し合わせればよいので、棒の断面積を S とすると、dm=(M/V)Sdx から、

$$I=\frac{M}{\ell S}\int_0^{\ell}x^2S\mathrm{d}x=\frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell}=\frac{M\ell^2}{3}=\frac{Mb^2}{3}$$

となる．断面積 S には依らない．

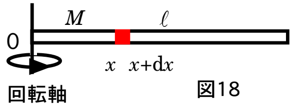

図18

B) 一様な細い棒 - 中央の回転軸（$k=1/3\approx 0.33$）

回転軸を棒の中央（重心、図１９）にしたときも同様で、

$$I=\frac{M}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}=\frac{M\ell^2}{12}=\frac{Mb^2}{3},\ \ b=\frac{\ell}{2}$$

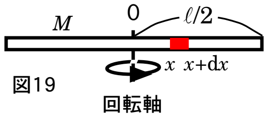

図19

とA) の場合の４分の一になるが、最大半径 b では同一になる．

C) 円盤あるいは円柱 - 面に垂直な回転軸（$k=1/2=0.5$）

図２０に示すように、半径 b、厚み c の円盤の重心を通り面に垂直な回転軸の場合には、その高い対称性を利用して積分する．回転軸からの距離 r、幅が dr の円環を考えると、dm=(M/V)2πrc dr から、

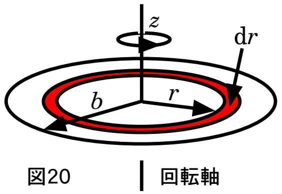

図20

$$I_z=\frac{M}{\pi b^2 c}\int_0^b r^2 2\pi rc\,\mathrm{d}r=\frac{2M}{b^2}\int_0^b r^3\,\mathrm{d}r=\frac{2M}{b^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^b=\frac{Mb^2}{2}$$

が得られる．厚み c には依らないので円盤・円柱で同じ値を持つ．

D) 円盤 - 面に平行で重心を通る回転軸（$k=1/4=0.25$）

図２１の場合には、これまでのように円の方程式から r^2 を求め、積分することにより求められるが、ここでは、(13-1) 式と対称性を用いて求めよう．C) の時のように、面に垂直な回転軸の場合は、回転軸からの距離 r_i を用いて

$$I_z=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i(x^2+y^2)$$

と書くことが出来る．

一方、y 軸に回転軸を持つ図２１で、薄い板を考えると、$z_i=0$ なので、

$$I_y=\sum_i m_i({x_i}^2+{z_i}^2)=\sum_i m_i{x_i}^2$$

となる．対称性から、x 軸に回転軸を持つときは

$$I_x=\sum_i m_i({y_i}^2+{z_i}^2)=\sum_i m_i{y_i}^2、$$

したがって、薄い板の場合には一般的に

$$I_z=I_x+I_y \qquad (13\text{-}2)$$

が得られる．対称性から、$I_x=I_y$ だから、

$$I_y=\frac{I_z}{2}=\frac{Mb^2}{4}$$

が得られる．ここで計算した中では最も小さい．

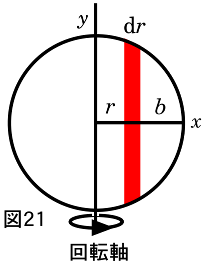

図21

E) 円筒（$k=1$）

円筒は半径 b に全ての質量が集っているので、質点の場合と同じである：　$I=Mb^2$.

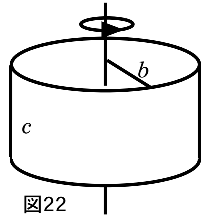

図22

F) 球（$k=2/5=0.4$）

図２３に示す半径 b の球の場合は、対称性から$I_x=I_y=I_z$ であることは明らか．また、x, y, z の各軸を回転軸とする慣性モーメント、

$$I_x=\int(y^2+z^2)\,\mathrm{d}m、I_y=\int(x^2+z^2)\,\mathrm{d}m、I_z=\int(x^2+y^2)\,\mathrm{d}m$$

から、

$$I_x+I_y+I_z=3I=2\int(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}m=2\int r^2\,\mathrm{d}m$$

が得られる．図２３に示す球殻について考えると、dm=(M/V)4πr^2dr なので、球の慣性モーメント I は

$$I=\frac{2\int_0^b r^2\mathrm{d}m}{3}=\frac{8\pi M}{3\frac{4}{3}\pi b^3}\int_0^b r^4\mathrm{d}r=\frac{2M}{b^3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^b=\frac{2Mb^2}{5}$$

と求まる．

この値は、円柱よりも僅かに小さく、円筒の半分以下である．

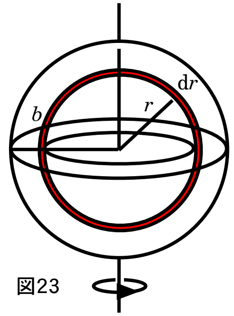

図23

G）球殻（k = 2/3 ≈ 0.66）

球殻も F) の球と同じ対称性を持つので、同じ方法が使える．全ての質量は r=b に集中しているので、積分は簡単になる：

$$I=\frac{2b^2}{3}\int \mathrm{d}\,m=\frac{2Mb^2}{3}$$

と容易に求まる．これは円筒の次に大きい．

H）回転軸が重心を通らない場合

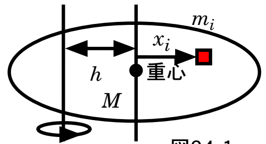

図24-1

実体振子（１１）の例のように、回転軸が重心を通らない場合に便利な関係式を見ておこう．図２４より、重心を通らない回転軸の周りの慣性モーメントは、

$$I=\sum_i m_i(h+x_i)^2=h^2\sum_i m_i+\sum_i m_i x_i^2+2h\sum_i m_i x_i$$

$$=Mh^2+I_G \qquad (13\text{-}3)$$

となる．第３項は重心の定義からゼロになる．I_G は重心を通る回転軸の周りの慣性モーメントで、Mh^2 は、回転軸から h だけ離れた重心に M を置いたときの慣性モーメント．物理学実験第一のテーマである、単振子による重力加速度の測定で (13-3) 式が用いられている（図２４-２）．運動方程式は、錘が質点ではなく大きさを持つので回転の運動方程式を使って、

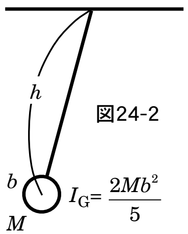

図24-2

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=N=-Mgh\sin\theta\approx-Mgh\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{Mgh}{I}\theta=-{\omega_0}^2\theta,\quad \omega_0=2\pi f_0=\sqrt{\frac{Mgh}{I}},$$

から、周期 T は

$$T=\frac{1}{f_0}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{I_G+Mh^2}{Mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{\mathrm{g}}\left(\frac{I_G}{Mh}+h\right)}=2\pi\sqrt{\frac{1}{\mathrm{g}}\left(\frac{2b^2}{5h}+h\right)}=2\pi\sqrt{\frac{h^*}{\mathrm{g}}}$$

となり、有効な振子長は$h^*=h+\frac{2b^2}{5h}$となり、重心までの振子長より長い．その理由は、振子の振動に伴い、錘も回転しているためで、回転に必要なエネルギー分だけ重心の運動エネルギーが減ることに対応して、斜面を転がる場合と同様に、周期が長くなる．

演習問題

図２５の様に球殻に半径 r、厚さ dz の短い円筒を考え、球殻の慣性モーメントが$\frac{2Mb^2}{3}$で与えられることを確認せよ．

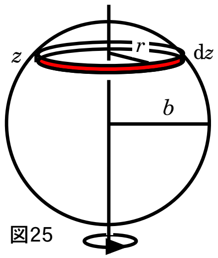

図25