IV.弾性体

質点の集まりである剛体の場合には、全く外力による形状の変化は考えなかった．しかし、実際の物体は力を加えると変形する．その変形量が圧力に比例するような性質を弾性と呼ぶ．しかし、ある割合以上に変形させると、破壊はしないけれど、力を取去っても永久に元の長さには戻らなくなる．この性質を塑性と呼ぶ．これらの性質は、身近なあらゆる物質が持っており、重要な役割を担っている．特に、構造物の耐荷重性や耐震性を設計する上で基本となる性質である．ここでは、一様な弾性体を考える．

1.応力 τ と歪み ε とヤング率 E

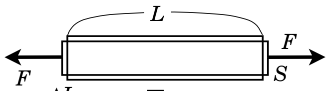


図1

棒状の弾性体に圧縮（引張り）力 F を加えると加えた力に応じて長さが ΔL だけ変化するが、その比例係数 k は弾性体固有の性質だけではなく、その形状にも依存する（フックの法則）：

$$F=k\Delta L. \qquad (1)$$

図１のような棒状の弾性体を例に取ると、長さ L が短いほど、また、断面積 S が大きいほど ΔL だけ歪ませるには大きな力が必要になる．そこで、(1) 式を

$$F=E\frac{S}{L}\Delta L \qquad (2)$$

と書き表せば、E は形状に依存しない、弾性体の物質固有の性質を表すことになる．そこで、(2) 式を

$$\tau=E\varepsilon \qquad (3)$$

と書換えよう．ここで、

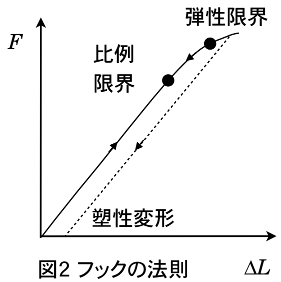


図2 フックの法則

$$\tau=\frac{F}{S}\,(\mathrm{Pa=N/m^2}),\ \varepsilon=\frac{\Delta L}{L},\ E\,(\mathrm{Pa})$$

であり、τ は棒の端面における圧縮（引張り）応力、ε は歪み、E はヤング率と呼ばれる．ヤング率は物質に固有のバネ定数に相当しており、強固で、変化しにくい物質ほど大きな値を持つ．通常、弾性限界内の歪みは $\varepsilon<<1$ の関係を満たす程度に小さい．

さて、応力は物体内の任意の面について考えることが出来る．図３に示すような任意の断面に垂直な垂直応力 $\tau_\perp$、平行な接線応力 $\tau_{//}$ を定義できる．断面の面積は、なす角 θ を使って $\frac{S}{\cos\theta}$ となり、棒の端面より大きい．従って、常に τ より小さく、

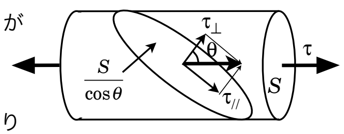


図3

$$\tau_\perp=F\cos\theta/(S/\cos\theta)=\tau\cos^2\theta,$$
$$\tau_{//}=F\sin\theta/(S/\cos\theta)=\tau\sin\theta\cos\theta \qquad (4)$$

となる．接線応力は、ずれ（ずり）応力、せん断応力等とも呼ばれる．４図に示した角度依存性から、４５度の時に最も大きなせん断応力が働くことがわかる．

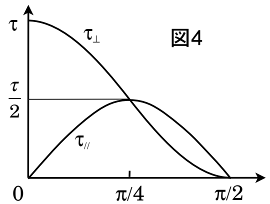


図4

2.弾性定数

ヤング率は一軸応力を加えた場合の弾性定数である．これ以外に、体積弾性率 K、ずれ弾性率 G があるが、互いに関連している．

ヤング率 E（Young's modulus）

図１に示すように、一方向から応力を加えて引張る（正に取る）、或いは圧縮（負に取る）すると弾性体は加えた応力τに比例して応力と並行方向に $\varepsilon_{//}$ だけ歪む：

$$\tau=E\varepsilon_{//} \qquad (3)$$

その比例係数 E（$\mathrm{Pa=N/m^2}$）をヤング率（歪みが１(100%)の時の応力）と呼ぶ．この時に、図１に誇張して表されているように、必ずしも歪み $\varepsilon_{//}$ 分だけ体積が増加（或いは減少）する訳ではなく、加えた力と垂直な方向（図１では太さ方向）にも逃げるように $\varepsilon_\perp$ だけ歪む．$\varepsilon_\perp$ の $\varepsilon_{//}$ に対する比例係数をポアッソン比 σ（シグマ）と呼ぶ：

$$\varepsilon_\perp=-\sigma\varepsilon_{//} \qquad (5)$$

ポアッソン比が 0.5 の時には応力によって体積は全く変化せず[注]、それ以下の時には圧縮時には体積が減少する．ヤング率とポアッソン比は最も基本的な弾性定数であり、体積弾性率や剛性率は、基本常数のヤング率 E、ポアッソン比 σを用いて表現出来る．

体積弾性率 K (Bulk modulus)

水中では周囲から一様な圧力 ΔP（静水圧、$\mathrm{N/m^2}$）を受けて体積が減少する：

$$\Delta P=-K\frac{\Delta V}{V}. \qquad (6)$$

その比例係数 K（$\mathrm{N/m^2}$）を、体積弾性率（$\Delta V=-V$、にするのに要する圧力）と呼ぶ．その逆数は、圧縮率である．

体積弾性率は、ヤング率とポアッソン比に関係づけることが出来る．辺の長さ L の立方体に、３方向から応力を加えることを考えると、(3) 式に従って歪み量を足し合わせればよい．等方的な弾性体なので、表２−１に示すように歪みはどの方向でも同じで、x 方向では、

$$\varepsilon_x=\frac{\Delta L}{L}=(1-2\sigma)\frac{\tau}{E}、$$

となることが分る．これを用いると、体積の変化分、$\frac{\Delta V}{V}$ は、

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{L^3-(L-\Delta L)^3}{L^3}=\frac{3L^2\Delta L-3L\Delta L^2+\Delta L^3}{L^3}$$
$$=3\frac{\Delta L}{L}+O((\Delta L/L)^2)\approx 3\frac{\Delta L}{L}=\frac{3(1-2\sigma)}{E}\tau$$

で与えられる．τ が $-\Delta P$ に相当するから、(6) 式と比較して、

$$K=\frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad (7)$$

と求まる．

表2−1 ヤング率と体積弾性率。
ε_{ij} は i 方向の応力による j 方向の歪。

	ε_x	ε_y	ε_z
τ_x	$\varepsilon_{xx}=\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{xy}=-\sigma\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{xz}=-\sigma\frac{\tau}{E}$
τ_y	$\varepsilon_{yx}=-\sigma\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{yy}=\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{yz}=-\sigma\frac{\tau}{E}$
τ_z	$\varepsilon_{zx}=-\sigma\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{zy}=-\sigma\frac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{zz}=\frac{\tau}{E}$
合計	$(1-2\sigma)\frac{\tau}{E}$	$(1-2\sigma)\frac{\tau}{E}$	$(1-2\sigma)\frac{\tau}{E}$

ずれ弾性率／剛性率 G (Shear modulus)

こんにゃく（例、厚さは1m）の上下面に平行に、互いに反対方向に押してやると、平行四辺形にゆがむ．歪みの大きさ θ はずれ応力 τ に比例し、

$$\tau = G\theta \qquad (8)$$

と書ける．その比例係数 G（$\mathrm{N/m^2}$）をずれ弾性率または剛性率と呼ぶ（1 rad 傾けるのに要する応力に相当）。

ずれ弾性率 G をヤング率 E とポアッソン比σで表してみよう．そこで便宜的に図６に示すように、このコンニャクが一辺の長さ $\sqrt{2}L$、厚さ1mの立方体の一部分と考える．図5の４つの力 $F=\tau L$ を図６における x, y 成分 $F/\sqrt{2}$ に分解し、隣合う同一方向成分の合力 $\sqrt{2}F$ を考えると、図５の４つのずれ応力は、図６では x 方向の圧縮応力 $\tau_x = -\dfrac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2}L} = -\tau$ と、y 方向の引張応力 $\tau_y = \dfrac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2}L} = \tau$ が働いている時と同等である．そうすると、体積弾性率の場合と同様に容易にヤング率とポアッソン比を用いて τ_x、τ_y に対する歪み ε_x、ε_y を求めることが出来る（表２−２）.

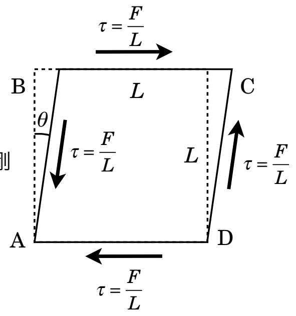


図5 ずれ応力とずれ変形

次に、図６においてずれ角 θ を求めてみよう．図６から抜出した、一辺の長さ $\dfrac{L}{\sqrt{2}}$ を持つ４分の１の四辺形を図７に示す．長さ L の稜ベクトルの τ_x、τ_y による変化量 $\Delta\boldsymbol{L}$ の長さは、歪み ε_x、ε_y を用いて、

$$\Delta L = \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2} = L\frac{1+\sigma}{E}\tau$$

と求まる．また、ずれ変形によって稜の長さは変化せず、θ は小さいので、

$$\Delta L = L\frac{\theta}{2}$$

が成立つ．両式より、

$$\theta = \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau$$

が得られ、(8) 式から、

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad (9)$$

が求まる．

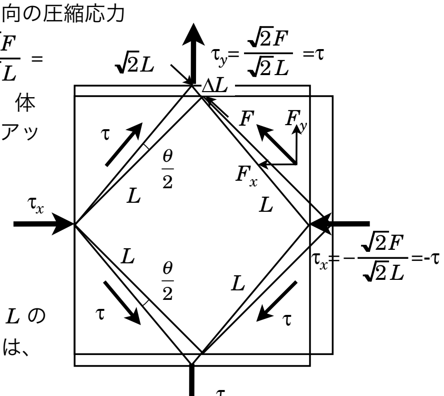


図6

表２−２ ε_{ij} は i 方向の応力による j 方向の歪。

	ε_x	ε_y
τ_x	$\varepsilon_{xx} = -\dfrac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{xy} = \sigma\dfrac{\tau}{E}$
τ_y	$\varepsilon_{yx} = -\sigma\dfrac{\tau}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \dfrac{\tau}{E}$
合計	$-(1+\sigma)\dfrac{\tau}{E}$	$(1+\sigma)\dfrac{\tau}{E}$

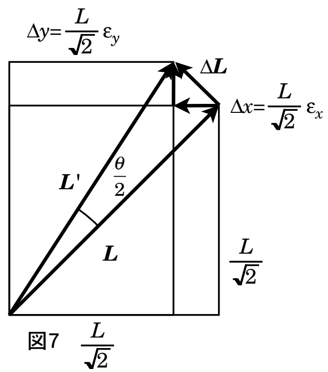


図7

演習問題1

表2−3 種々の物質における弾性率

物質	ヤング率 E ($\times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$)	ポアッソン比	体積弾性率 K ($\times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$)	剛性率 G ($\times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$)
鋳鉄	15.23	0.27	10.98	6.0
鋼鉄	20.1 ~ 21.6	0.28 ~ 0.30	16.5 ~ 17.0	7.8 ~ 8.4
アルミニウム	7.03	0.345	7.55	2.61
金	7.8	0.44	21.7	2.7
銀	8.27	0.367	10.36	3.03
銅	12.98	0.343	13.78	4.83
鉛	1.61	0.44	4.58	0.559
真鍮（黄銅）	10.06	0.350	11.18	3.73
ガラス	8.01 (7.13)	0.27 (0.22)	5.76 (4.12)	3.15 (2.92)
ポリエチレン	0.076	0.458	-	0.026
ポリスチレン	0.383	0.340	0.400	0.143
ゴム	(1.5 ~ 5.0) $\times 10^6$	0.46 ~ 0.49	-	(5 ~ 15) $\times 10^5$

体積弾性率、剛性率とヤング率、ポアッソン比の関係式が実際の物質で成立っていることを確認しよう。表２−３の数値をグラフ用紙にプロットして、(7) 式、(9) 式と比較しなさい．グラフの縦軸には、E/K、E/G を取り、横軸にはポアッソン比 σ を取るとグラフが直線になるので、(7) 式、(9) 式との比較が容易になる.

註）歪んだときの体積変化

$\varepsilon_{/\!/}$ だけ長さが縮み、$\varepsilon_{\perp} = -\sigma\varepsilon_{/\!/}$ だけ棒の幅と厚みが増えるとき、その体積は

$$V = (1+\varepsilon_{/\!/})L\times(1-\sigma\varepsilon_{/\!/})^2 w^2 = Lw^2(1+\varepsilon_{/\!/}-2\sigma\varepsilon_{/\!/}-2\sigma{\varepsilon_{/\!/}}^2+(1+\varepsilon_{/\!/})(\sigma\varepsilon_{/\!/})^2)$$

$$= V_0(1+\varepsilon_{/\!/}-2\sigma\varepsilon_{/\!/}+O({\varepsilon_{/\!/}}^2)) \cong V_0,\ (\varepsilon_{/\!/} << 1,\ \sigma = 0.5 \text{ の時})$$

で与えられ、ポアッソン比が 0.5 の時には体積は変化しない．$\varepsilon_{/\!/}$ は負（圧縮）なので、0.5 以下の時には収縮する.

曲げ・撓み

弾性定数を用い、棒の撓みについて調べよう．撓 (たわ) んで曲率半径 R で曲がった幅 a、厚さ t の棒の様子を図８に示す．撓みの場合は、棒の内部で歪みの大きさが分布する特徴がある．「**中立層**」と呼ぶ歪みがゼロの層があり、その上下では歪みの符号が逆転している：上側で引張り（正）、下側で圧縮（負）．（長さ方向に正味の引っ張りや圧縮をせず、単に曲げる場合には中央に中立層が出来る：上面と下面に同じ大きさで逆向きの応力を加える場合に相当）

曲率半径 R を持つ中立層から距離 r だけ離れた、厚み $\mathrm{d}r$ 、幅 a、長さ $(R+r)\mathrm{d}\theta$ の薄い層を考えよう．この層の歪みは、中立層の長さ $R\mathrm{d}\theta$ からの伸び縮みであるから、

$$\varepsilon(r)=\frac{(R+r)\,\mathrm{d}\theta-R\,\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{d}\theta}=\frac{r}{R}=\frac{\tau(r)}{E}$$

で与えられる．従って、この層に加わっている力 $\mathrm{d}F$ は、$\mathrm{d}S=a\mathrm{d}r$ を用いて、

$$\mathrm{d}F=\tau(r)\,\mathrm{d}S=\frac{Ea}{R}r\,\mathrm{d}r$$

となる．図９に原点近傍の拡大図を示す。異なる r_i には異なった力 $\mathrm{d}F_i$ が働くが、中立層を支点とした力のモーメントを考えると、全て同じ方向、$\mathrm{d}\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{r}_i\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}_i$、紙面の表から裏側に向いている．これらを全て足し合わせると、この棒を撓ませる原因である力のモーメント $\boldsymbol{N}$ に等しいはずである．従って、曲率半径 R で撓んでいる棒が支えている力の（曲げ）モーメント N は、

$$N=\int_{-t/2}^{t/2}dN=\int_{-t/2}^{t/2}rdF=\frac{Ea}{R}\int_{-t/2}^{t/2}r^2\mathrm{d}r=\frac{Ea}{R}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$=\frac{Eat^3}{12R}=\frac{EI}{R},\quad I=\frac{at^3}{12}\qquad(10)$$

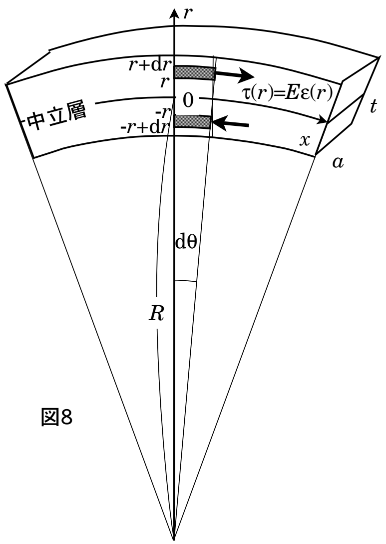


図8

となる．ここで、I は断面の２次モーメントと呼ばれ、断面の形状のみによって決定される．(10) 式の特徴は、同じたわみ量（=同じ曲率半径 R）であっても、棒が支えている力のモーメント N が棒の厚みの３乗に比例して増える点にある．すなわち、水平にした棒の先におもりを乗せた場合、棒の厚みを２倍にしてやることにより、棒がたわむ量を $1/2^3=1/8$ に減らすことが出来る．板の幅 a を1/10にして、厚さ t を10 倍にすると、驚く無かれ、同じ重量の材料で曲げ強度がなんと $10^3/10=100$ 倍になる！構造材として、いわゆる **H** 型鋼として知られる形状を用いる理由がここにある．

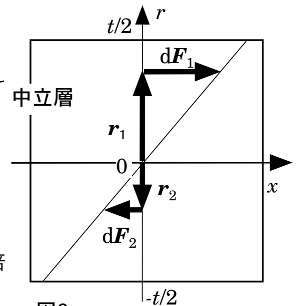


図9

水平な棒の撓み

図１０のように、長さ L、厚み t、幅 a の棒が壁から水平に固定され、その先端には W の荷重がかけられてている．簡単のために、棒の重さは無視する．

さて、断面 x には荷重による力のモーメント、$(L-x)W$ がかかっており、(10) 式の断面の曲げモーメント EI/R とバランスしている：

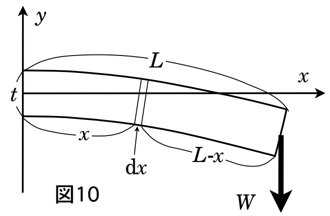


図10

$$\frac{EI}{R}=W(L-x),\quad I=\frac{at^3}{12}.\qquad(11)$$

ここで、棒の先端におけるたわみは十分小さいので $(\boldsymbol{L}\text{-}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{W}=(L\text{-}x)W$ と近似した(直交性を仮定)．曲率半径の逆数 $1/R$ は

$$\frac{1}{R}=-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\quad\left(\begin{array}{c}\because y=\sqrt{R^2-x^2}=R\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2}\approx R-\frac{x^2}{2R},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{R}\\ (1+\delta)^{-m}\approx 1-m\delta,\ when\ \ \delta=\left(\frac{x}{R}\right)^2<<1\end{array}\right)$$

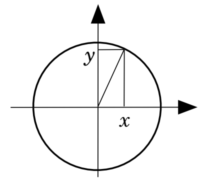


図11

と近似できるので、(11) 式は

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{W}{EI}(L-x)\qquad(12)$$

と書ける．x で２回積分して、棒の先端での下がり、$y(L)$ は、

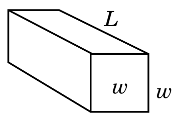
$$y(L)=-\frac{W}{EI}\int_0^L\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{W}{EI}\left[\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^L=-\frac{WL^3}{3EI}=-\frac{4WL^3}{Eat^3}\qquad(13)$$

と求まる．棒の長さの３乗でたわみ量が増加する．２次関数的にたわむので、それを足し合わせた（積分した）量は３次関数的になるためである．棒の厚さを増やせば急激にたわみ量を減らせるのは (10) 式で予測されるとおりである．

演習問題2

ア．(13) 式において、棒のたわみ量が加重に比例するので、適当な厚みの長い棒が一本あれば秤が作れる．さて、広い範囲の重さ（例えば、10 g から 1 kg まで）を量るにはどの様にすればよいか．

図12



イ．同じ質量の鉄鋼を使って梁を作ることを考える．２辺の長さがそれぞれ w の角材が曲率半径 R でたわんでいる時に、角材の断面に働く力のモーメント N はどう書けるか．次に、断面積を一定にしたまま、形状を H 型にした（図１２）．同じ曲率半径 R の時の力のモーメントを求め、角材の場合と比較せよ．縦長部分の幅を半分にして長さを２倍にするとどう変わるか．