角運動量保存則

角運動量が満たす回転の運動方程式

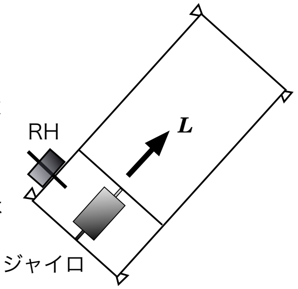
$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

は回転体に力のモーメントが働いていない「$\boldsymbol{N} = 0$ の孤立した系」においては

$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$、　$\boldsymbol{L} = \text{const.}$　となり、時間に依存しない一定の角運動量 $\boldsymbol{L}$ を永久に保つ（保存する）事を示す。 回転運動を解析する際には、この角運動量保存則と呼ばれる性質を利用する事ができる。

以下に角運動量保存則が関わる幾つかの例を見ていこう。

1）ハッブル望遠鏡



宇宙望遠鏡は非常に高い精度で宇宙の一点に焦点を合わせ続けなければいけない。そこで、ジャイロと呼ばれる高速回転して角運動量を持つ装置が使われている。望遠鏡には地球の万有引力が働く。しかし、地球の中心と望遠鏡を結ぶベクトル $\boldsymbol{R}$ は万有引力 $\boldsymbol{F}$ と平行なので「力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}\mathrm{x}\boldsymbol{F} = 0$」から望遠鏡の持つジャイロの角運動量の方向には影響しない。一方で、任意の天体を観測するにはジャイロの角運動量の方向を変える事も大変重要である。また、

A) 宇宙には塵を始めとした様々な飛行物体が存在し、望遠鏡に衝突して力のモーメントを及ぼす事は避けられない。僅かではあるが、観測の精度を下げる力のモーメントによる角運動量の変化を修正する必要がある。

B) もう一つは、観測点を変更するためには望遠鏡の方向を変える必要もある。

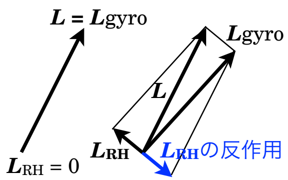
どちらの場合も、角運動量保存則を利用して実現出来る。

その目的で、ジャイロとは別に、リアクションホイール（RH）と呼ばれる自動制御された任意の速度で回転する装置が使われる。ジャイロとは異なる方向を向いた回転軸を持つリアクションホイールを回転させると、外部から力のモーメントは働いていないので、全角運動量は (2) 式に従い、時間的に何の変化も生じない。即ち、常に

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{gyro}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{RH}}$$

となって全角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存するので、ジャイロの角運動量の方向が変化することになる。ジャイロの角運動量の方向を変えるために何らかの力のモーメントは当然必要になる。外部からは与えられておらず、リアクションホイールを回転させる際に望遠鏡が受ける反作用がジャイロの方向を変える様な力のモーメントを生み出しているはずである。

課題：ジャイロの方向を任意の向きに回転させるためには、リアクションホイールは1つでは $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{L}_{\mathrm{RH}}$ の作る面内でしか回転出来ない。任意の方向に向けるためには最低限、幾つのリアクションホイールが必要か考察せよ。



2）フィギュア・スケート

冬のオリンピックの種目の中でもフィギュアスケートはその花形の一つである．フィギュアスケートの選手の滑りを見ていると、華麗に自転する場面に出合う．最初は、手を一杯に広げてゆっくり回転し、途中で手を胸に引き寄せると、回転が著しく加速される．この理由を角運動量保存則で定性的に解析をしよう．

選手は摩擦の小さな氷の上で滑っているので、スピンしている時に、氷から力のモーメントを受ける事は無いと考えられる。従って、選手が広げた腕を縮める際に、**外力** による**力のモーメント**は働いていないので、回転の運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$$

で与えられ、角運動量保存則 $\boldsymbol{L} = I\omega =$一定が成り立つ。腕を広げた状態の慣性モーメントを I_1、角速度を ω_1、腕を縮めた状態の慣性モーメントを I_2、角速度を ω_2 とすると、$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ が成り立ち、腕を縮めた状態の角速度 ω_2 は $\omega_2 = (I_1/I_2)\omega_1$ と、腕を縮めて慣性モーメントが小さくなった割合で速くなる。

この時に角運動量は保存されているが、回転のエネルギーはどう変化するのかを考察しよう。エネルギーは $E = mv^2/2 = I\omega^2/2$ で与えられるので、手を縮める前のエネルギー $E_1 = I_1\omega_1^2/2$ に対して、手を縮めた後のエネルギー $E_2 = I_2\omega_2^2/2$ の変化を考えてみよう．角運動量保存則 $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ より $\omega_2 = (I_1/I_2)\omega_1$ なので、求める腕を縮めた後のエネルギーは $E_2 = (I_1/I_2)I_1\omega_1^2/2$ となる．明らかに $I_1 > I_2$ なので、手を縮めることで回転のエネルギーが増加したことが分る．

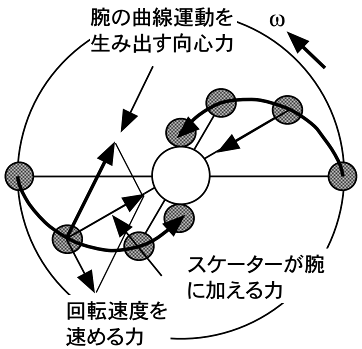
さて、外部から力のモーメントは働いていないのに、この回転運動のエネルギーの増分はどのように供給されたのだろうか？

回転する選手の上から見た右図は、手を縮める運動が、回転運動にどの様な効果を生みだすかを説明する。選手が腕に加えている直接の力は体の中心に向かっていて、動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ とは平行なので、一見、**力のモーメント**を生み出さない様に見える。しかし、その力を分解してみると、

(1) 腕先の曲線運動を生み出すための向心力

(2) 回転速度を速める回転方向の力

の合力として理解出来る。選手は、単に腕を縮める動径方向に力を加えているが、静止した外部から眺めると、実は腕を回転させる（振回す）動きをしており、結果として選手は回転速度を速める力を加えて**力のモーメント** $\boldsymbol{N}$ を生み出している。この**力のモーメント**ベクトル $\boldsymbol{N}$ は角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と平行であり、$\boldsymbol{L}$ を増大することは容易に確認できる。



3）**クアッドコプター**

4つの回転翼を持つ飛行体、ドローンの振舞に角運動量保存則が現れる。

ドローンの4つの回転翼はそれぞれが角運動量を持つ。そのバランスが崩れると、機体自身が回転を始める。その理由は角運動量保存則で説明がつく。

全角運動量は4つの回転翼の持つ角運動量 $\boldsymbol{L}i$ の合計である。

$\boldsymbol{L} = \Sigma_i \boldsymbol{L}i$

通常、対角に位置する一対の回転翼は同じ向きに回転するように作られている。すなわち、回転翼に順番に1から4の番号を付けると、

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \boldsymbol{L}_4 = 0, \ \therefore \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_3 = -(\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_4)$

となるように制御して、機体は回転させないように作られている。

この点を利用して、機体を自由に回転させる事もできる。

対角上にある回転翼の対のどちらかのみを停止させると、全角運動量を 0 に保つために、停止した角運動量と同じ角運動量を機体が持つ。

例えば、

$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_3 = 0$

とすると、機体の角運動量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}}$ は、

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}} = -(\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_4)$

になり、代わりにもう一対の回転翼 $(\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_4)$ を停止すれば、

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}} = -(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_3)$

になり、反対方向に回転を始める。

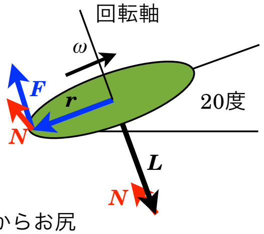
4）**水面上の石切り（水切り）**

http://www2.odn.ne.jp/~cdu32250/2taitoru/mizukiri.html

水面上で跳ねるように石を投げて、跳ねる回数を競う遊びがある。跳ねる回数を増やすためには、お皿のように平たい石を選び、それを回転させると効果的である。その理由は、ニュートンの回転運動の方程式が教えてくれる。

石が頭から水面に突っ込むと跳ねないので、頭を上げた状態で投げる必要がある。しかし、石を回転させずに投げると水面に衝突する際に水面から受ける力により、石が進行方向に頭を下げるように回転し、次に水面に到達した時に頭から突っ込み、跳ねない可能性が高くなる。

そこで、衝突時に水面から力を受けても姿勢が変化し難くするために、石を回転させ、角運動量を持たせると効果的である。空気抵抗に対しても安定するし、水からの力に対しても安定させることが出来る。



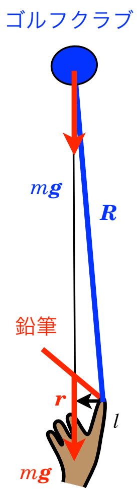
進行方向に対して20度の仰角を持たせるのが良いと言われている。右手で回転をかけて投げると、右の図のように角運動量は下面に垂直な方向に向く。

この石はお尻から水面に衝突する。その際に、お尻を叩きあげるような力のモーメント $\boldsymbol{N}$ が働く。その方向は、重心からお尻方向に伸ばした位置ベクトルと、上向きの力の外積になり、進行方向の左を向く。そうすると、跳ねる度に角運動量の方向は下向きで力のモーメントの方向の左側に傾くので、結果として回転軸は右に傾く。その結果、上の写真に見られるように、石は右方向にズレながら跳ねていくことが期待される。

石切は、水面と衝突時に外力による力のモーメントが働くので、単純な角運動量保存則ではないが、角運動量が力のモーメントよりも十分に大きければ角運動量はほぼ保存されることになる。

5）**バランス棒**（角運動量解析の例）

　指の先に棒を立て、倒れない様にバランスを取る場合、鉛筆の様な短い棒、傘の様に長い棒で、どちらが難しいだろうか。バランスを取るためにはどの様な事を考えれば良いだろうか。この解析には、回転の運動方程式が使える。



ニュートンの回転の運動方程式を用いて、ゴルフクラブの様に重心が先端にある長い棒と、重心が長さのほぼ中央にある短い鉛筆を比較する。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

の大きさを考えると、支点から重心までの距離が l なので、力のモーメントは $N = lmg$ で、慣性モーメントは、ゴルフクラブが mR^2、鉛筆が $mr^2/3$ （プリント「慣性モーメントの計算」を参照）で与えられる。

　ゴルフクラブは

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{I} = \frac{lmg}{mR^2} = \frac{lg}{R^2}$$

で、鉛筆は

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3lg}{r^2}$$

になる。人が応答できる時間には限りがある。約0.1秒以下の応答は困難と考えられるので、0.1秒に 0.1 radの角速度（1 rad/s）になると、人間では対応が出来ないと考えて良い。そこで、重心と支点のズレが l m の時に、その後、$\Delta\omega = 1$ rad/s まで増大するのに要する時間 Δt を大雑把に見積もってみよう。

$$\Delta t_{Golf} = \frac{R^2}{lg}\Delta\omega$$

$$\Delta t_{Pencil} = \frac{r^2}{3lg}\Delta\omega$$

正確には、l は時間の関数 $l(t)$ であるため、バランスを取らなければ時間の経過とともに大きくなる。従って、この式で見積もった時間よりも、実際は短い時間で傾く。

問題

(1) $R = 1$ m, $r = 0.2$ m, $l = 0.05$ m, $g = 10$ m/s^2 として、$\Delta\omega = 1$ rad/s になる時間 Δt をゴルフクラブと鉛筆の場合について見積もって下さい。

(2) 重心と支点のズレ l がより小さい時に反応できると、バランスを取りやすくなる。$l = 0.01$ m の場合の Δt を見積もり、バランスを取れる可能性を検討せよ。 l がどの位の時に反応すれば鉛筆でバランスが取れるか検討せよ。