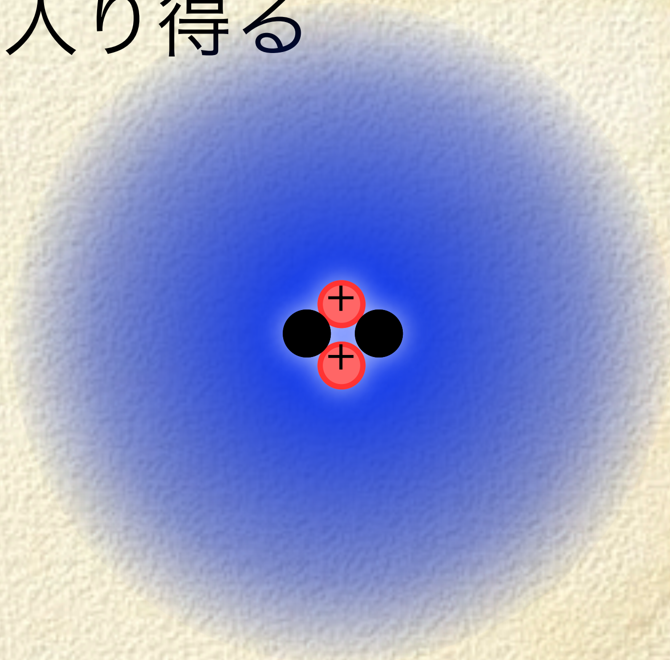
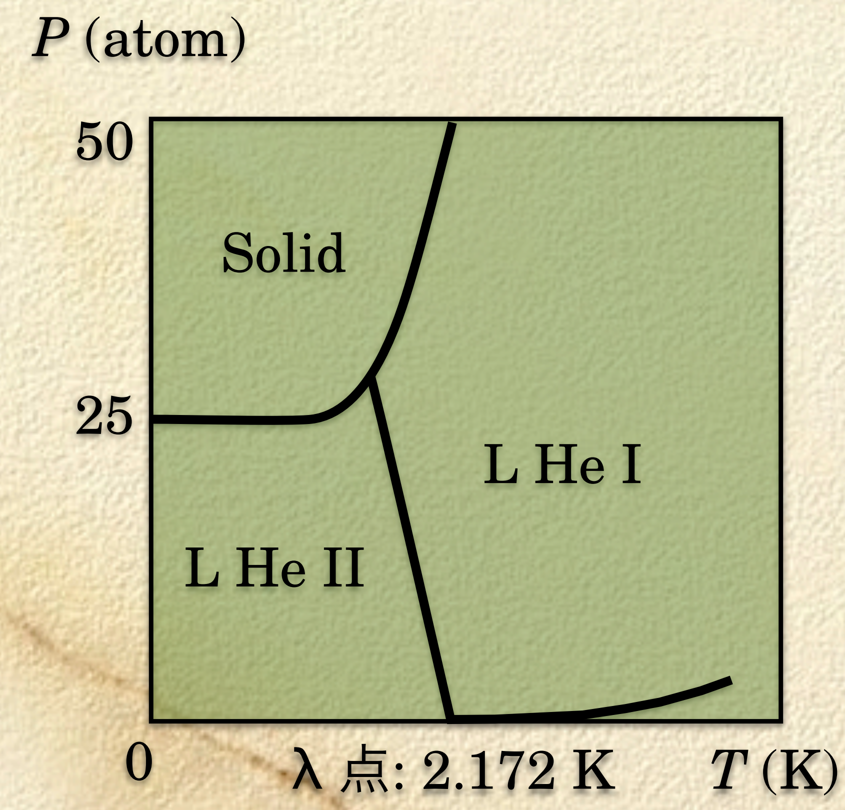
ヘリウム He^4 の超流動

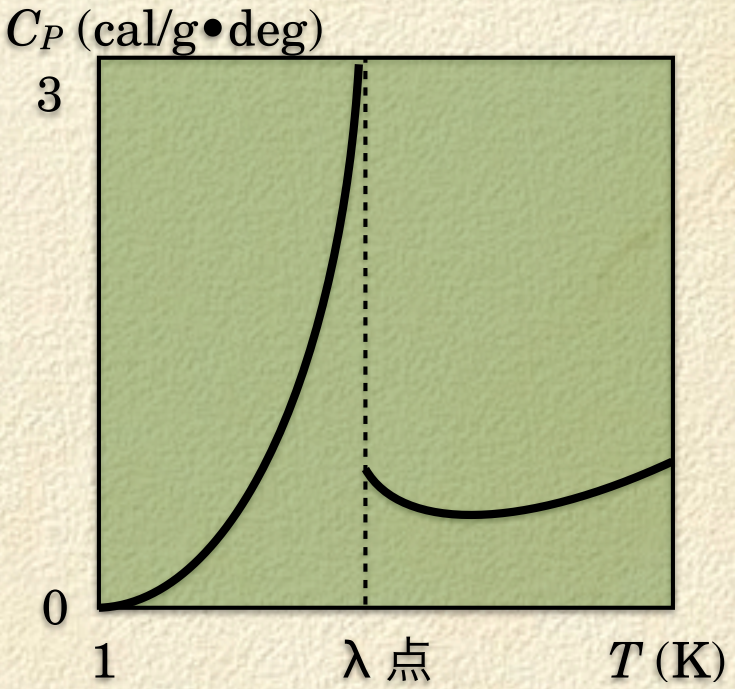
電子：**Fermion** x 2　**陽子**：**Fermion** x 2

共に Boson：1つの状態に多数の粒子が入り得る



常圧では、**絶対零度まで液体状態**：
閉殻構造、弱いVan der Waals 力、
軽い質量、大きなゼロ点振動

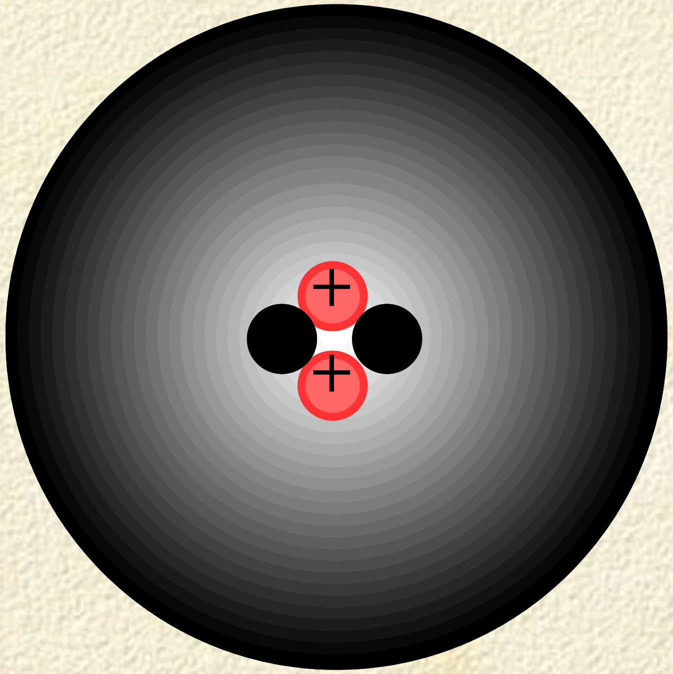




λ点以下では**マクロな量**のHe原子が**基底状態**に

λ字状に**比熱**が**消滅**

○ ヘリウム原子と電子



○ヘリウム原子 ^{4}He - スピン 0 のボーズ粒子

軽い（水素の「1」，　^{3}He の「3」の次）

質量数　4

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

⇓

ゼロ点振動エネルギーが大（通常の体積の３倍！不確定性原理）

閉殻構造

対称性高い、歪みにくい

van der Waals 力　⇓

原子間の相互作用が非常に弱い

常圧では、絶対零度でも「液体」

^{3}He、^{4}He のみ！

○電子、^{3}He - スピン（電子の自転運動による磁石） 1/2 のフェルミ粒子

金属の中の電子

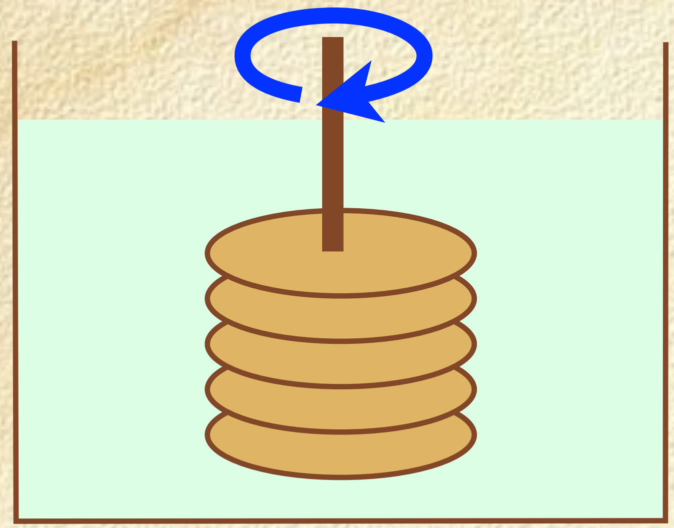
電子は、陽子よりも 2000 倍近く軽い　⇒　広がる方がエネルギーを得できる（金属結合）

フェルミエネルギーが大きい　⇒　６〜８万度！（金・銀・銅）　⇒　300 K でも超低温！！

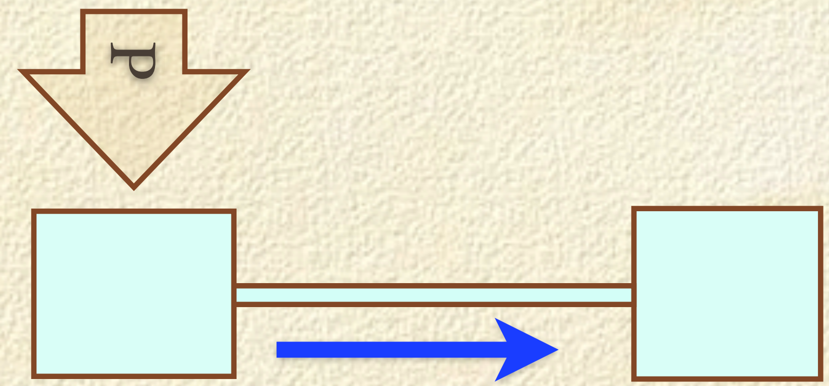
フェルミエネルギー近辺の $k_B T$ の幅の電子のみ　⇒　外界とエネルギーのやり取り

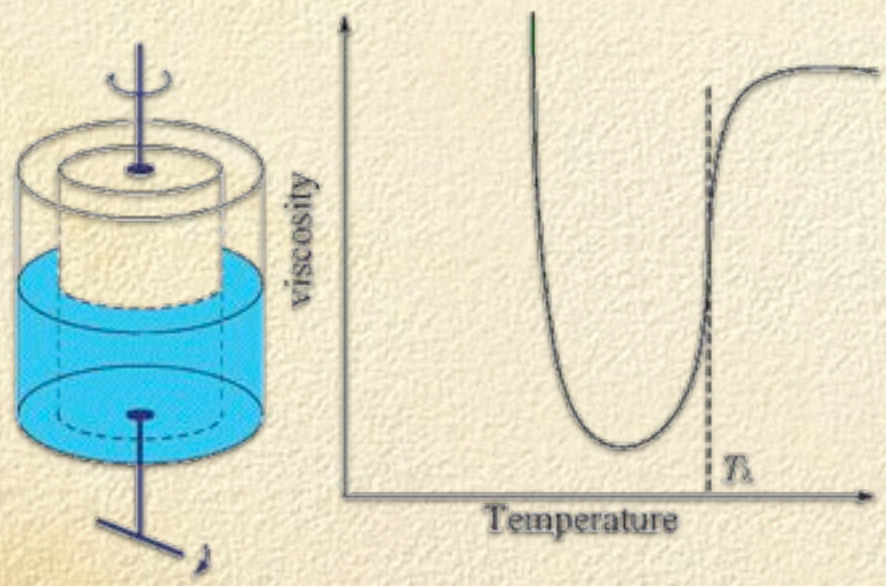
ヘリウム He^4 の超流動：実験事実

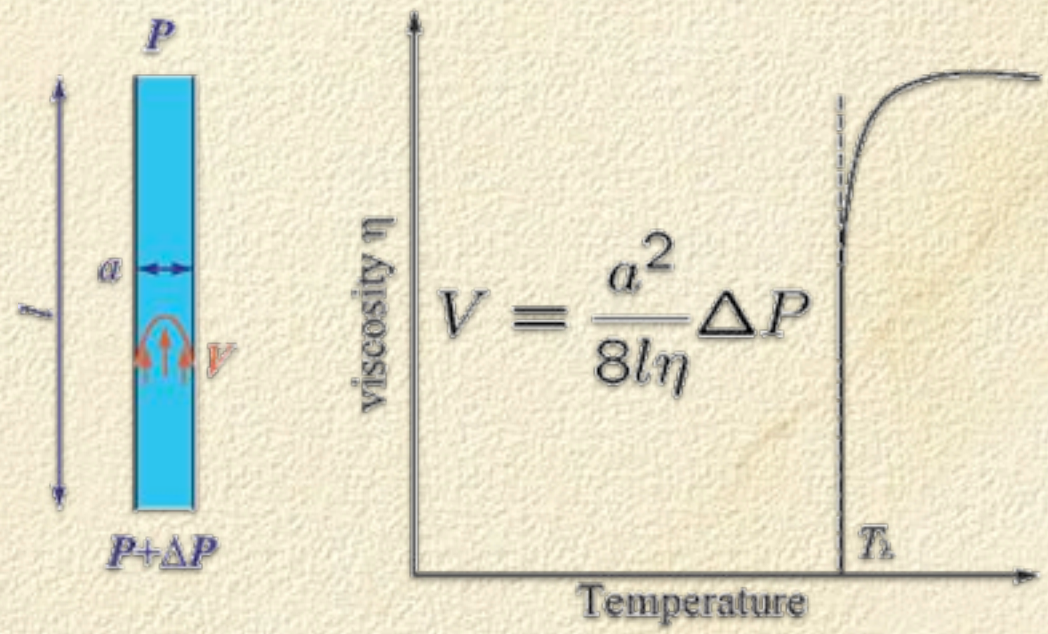
L-He II 中の円盤の回転運動



管径と流速







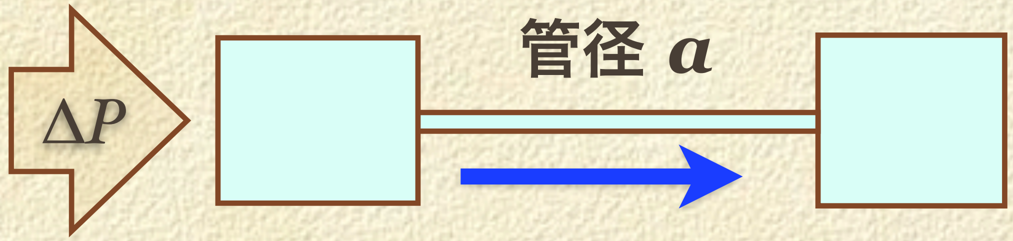
η：有限

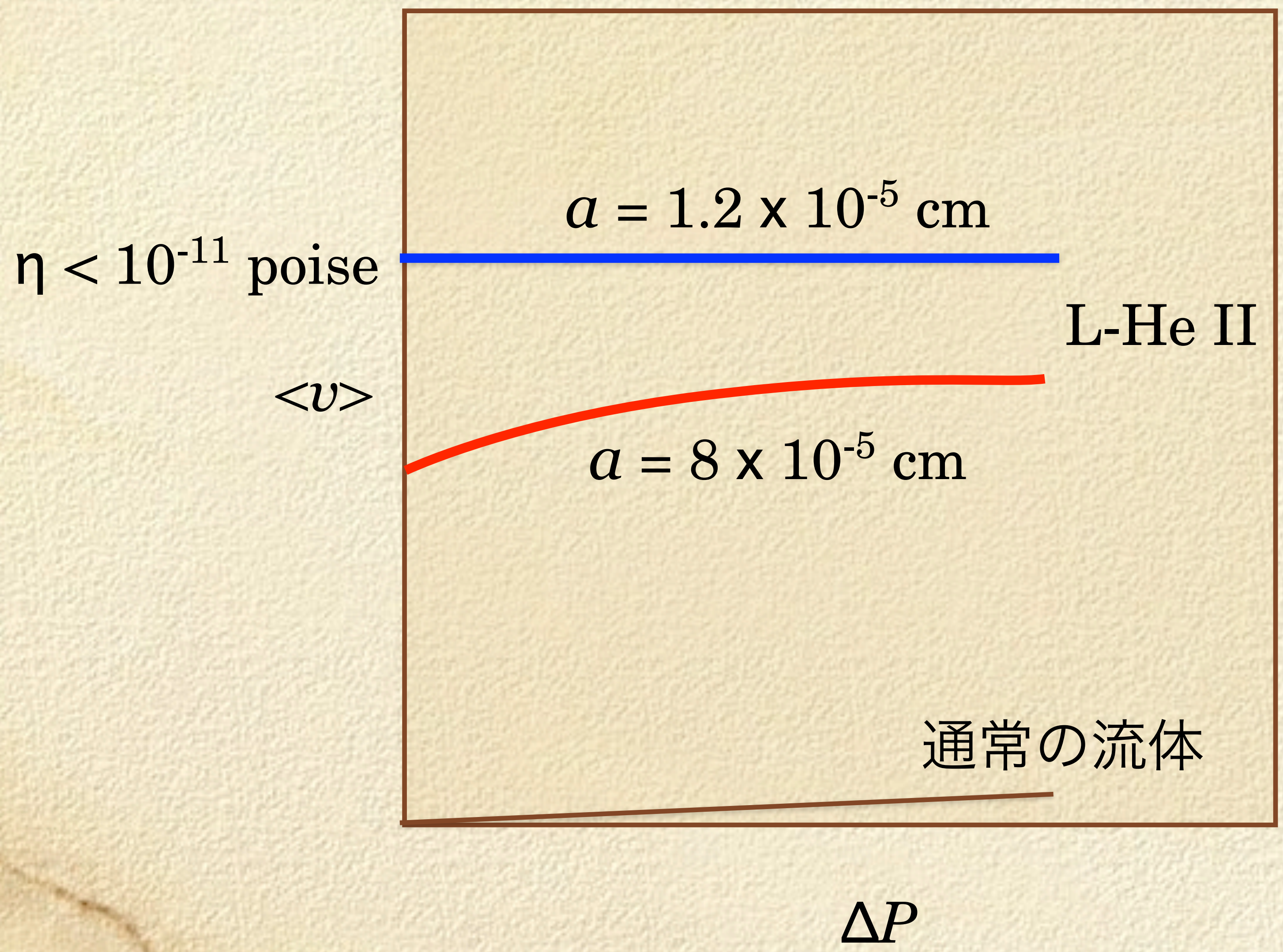
η：消滅

粘性係数は、**測定方法に依存**する

２流体モデル

管径と流速





○ 液体ヘリウム II（^{4}He II） 超流動

ボーズ・アインシュタイン凝縮が起こると、殆ど全ての粒子が同一の軌道、基底状態に入る.

⇓

液体ヘリウム全体として１つの波動関数で表わせる状態.

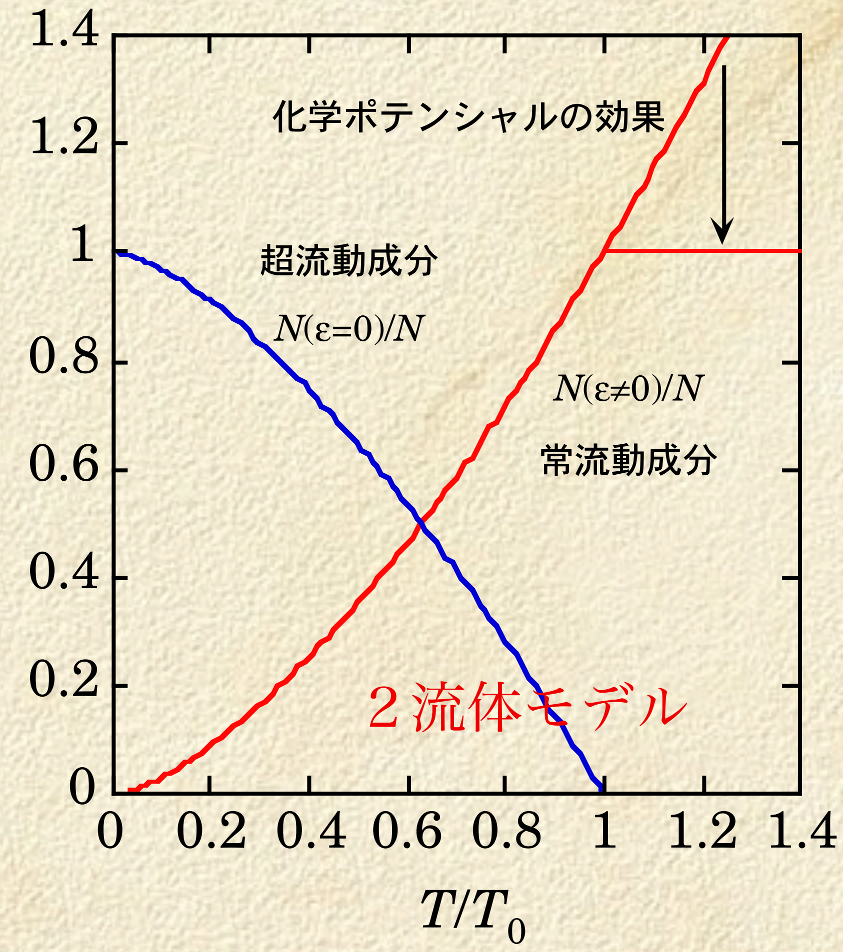
T=0 では運動エネルギー　ゼロ

粘性抵抗　ゼロ

２流体モデル

液体ヘリウムの超流動現象は、超流動体（基底状態）と常流動体（励起状態）の２つの異なる液体が混ざっている、としてよく説明される.

○毛細管の流動抵抗　管の内径が細いほど抵抗が小さい
○液体中の板の回転摩擦　有限の摩擦がある
○液体ヘリウムの噴水
○第２音波　密度一定の波
○容器表面の He II 膜が壁を登って外の液面と等しくなる
（100-200 Ǻ の膜厚で、毎秒 0.5-40 m の速さ）



熱機械効果（thermomechanical effect）

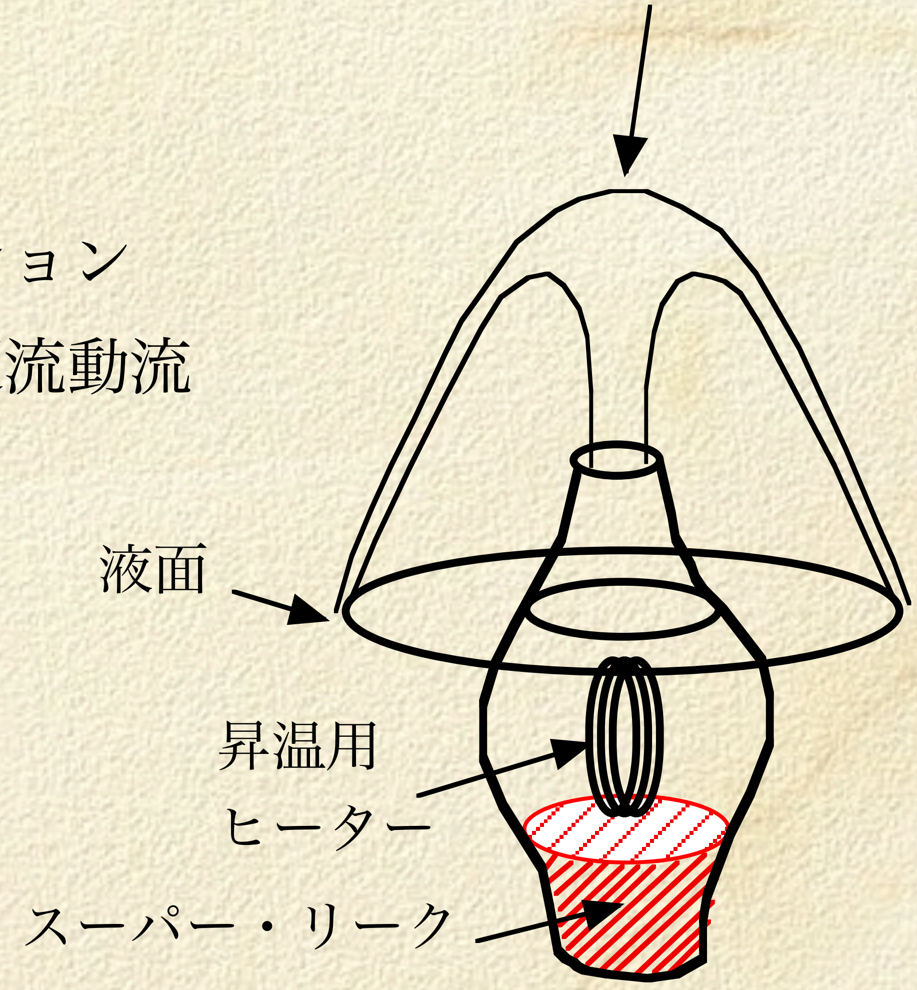
超流動　ヘリウムの噴水

超流動の２流体モデルのデモンストレーション

ヒーターで加温　超流動濃度減少を補う超流動流

こぼれる超流動ヘリウム

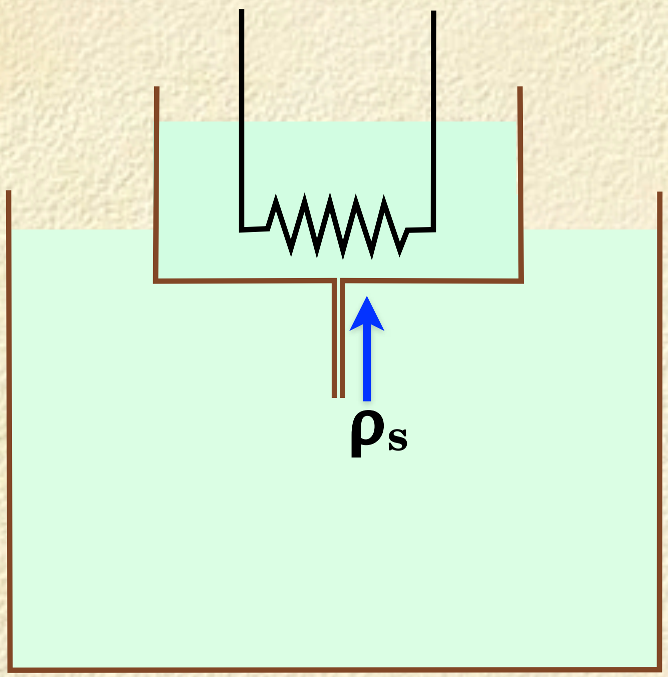
液体内の表面張力が極端に弱いため、ヘリウム原子とガラスの壁内分子との引力で壁をよじ登り、ついにはぽたぽたとこぼれてしまう.

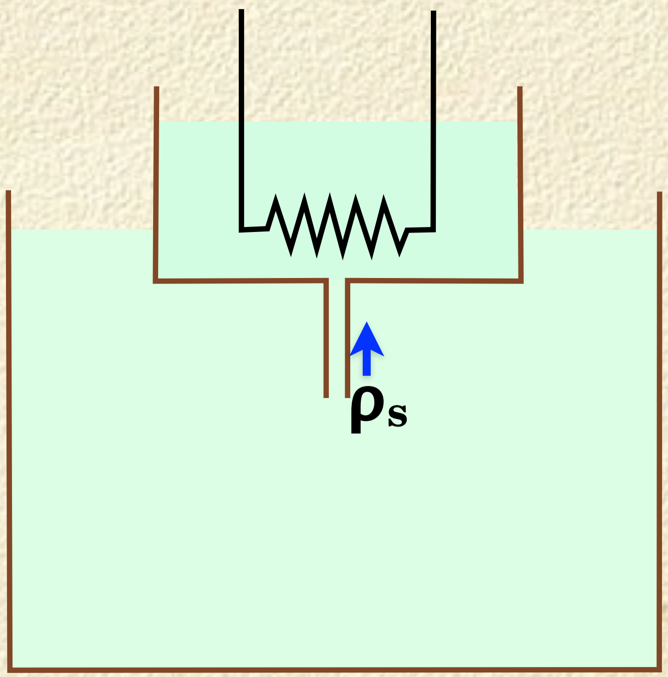


ヘリウム He^4 の超流動

実験事実

液温の上昇に伴い、ρ_s <=> ρ_n の入れ替え：管を通して ρ_s が流入





細い管　　　　太い管

管が細いにも関わらず、液面上昇が速い！

超流動 He-II 中の音波

第一音波

通常の密度波

第二音波

密度一定の波 => 熱（エントロピー）の波

粘性の無い ρ_s が高速で熱を伝える

沸騰が起こらない：静水面

第三音波

薄膜状 He で起こる波

第四音波

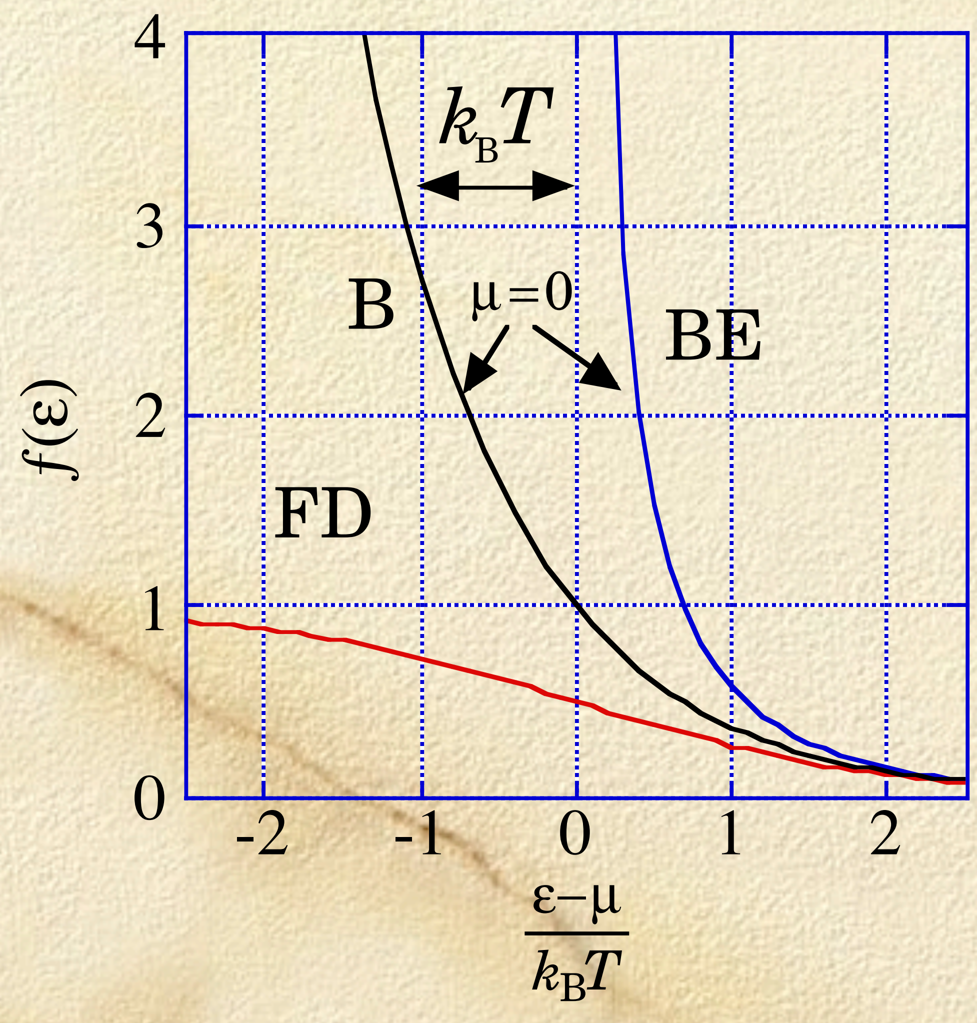
微少空間内を伝搬する波：密度と熱の振動による特異な波

○ 量子の世界の「おきて」

古典統計

Boltzmann ボルツマン分布

$$f_{\mathrm{B}}(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}$$



量子統計

Fermi 粒子が従う、

Fermi-Dirac（ﾌｪﾙﾐ-ﾃﾞｨﾗｯｸ）分布

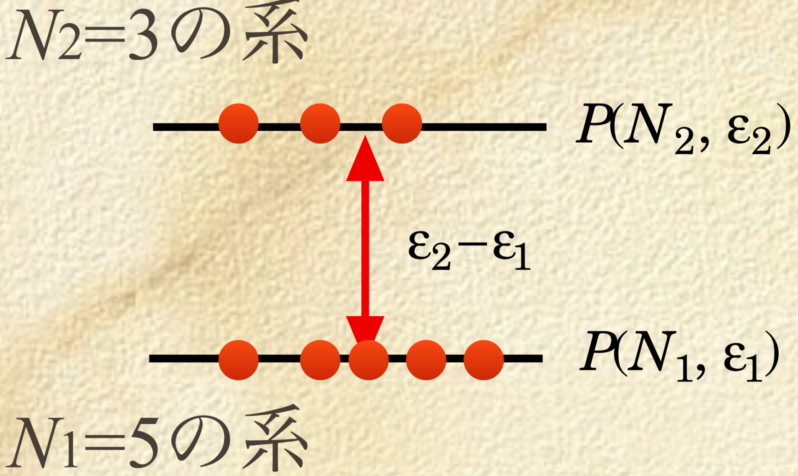
$$f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} + 1} \quad (\leq 1)$$

Bose 粒子が従う、

Bose-Einstein（ﾎﾞｰｽﾞ-ｱｲﾝｼｭﾀｲﾝ）分布

$$f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1}$$

○ 占有確率



温度 T の熱浴と接触している系の２つの状態、粒子数と全エネルギーが N_1, ε_1 と、N_2, ε_2 の場合を考えよう．この時、１の状態が実現する確率と２の状態の確率の比は、統計力学によると

$$\frac{P(N_2, \varepsilon_2)}{P(N_1, \varepsilon_1)} = \frac{e^{(N_2\mu-\varepsilon_2)/k_BT}}{e^{(N_1\mu-\varepsilon_1)/k_BT}}$$

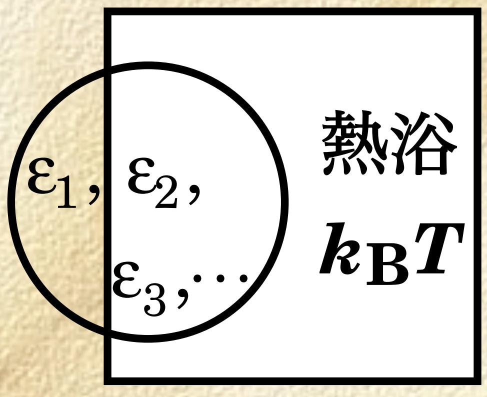
で与えられる．ここで、$e^{(N\mu-\varepsilon)/k_BT}$ はギブス因子と呼ばれる．

粒子数、N が一定の場合は、

$$\frac{P(N, \varepsilon_2)}{P(N, \varepsilon_1)} = \frac{e^{-\varepsilon_2/k_BT}}{e^{-\varepsilon_1/k_BT}} = e^{-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/k_BT}$$

となる．ここで、$e^{-\Delta\varepsilon/k_BT}$ はボルツマン因子と呼ばれる． (Maxwellの速度分布の式参照)

$\boxed{\text{Fermi}}$ 粒子が従う、 Fermi-Dirac（ﾌｪﾙﾐ-ﾃﾞｨﾗｯｸ）分布



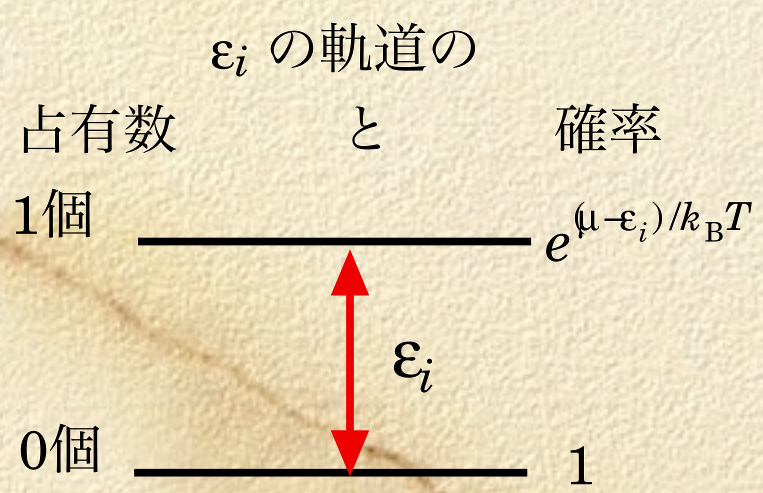
温度 T の熱浴と接触していて、相互作用が弱く、互いに独立と考えられるN個の軌道の内の１つ、ε_i $(i=1, 2, 3, \cdots, N)$ を占有するフェルミ粒子数（０か１）の平均値 $f(\varepsilon_i)$ を考えよう.

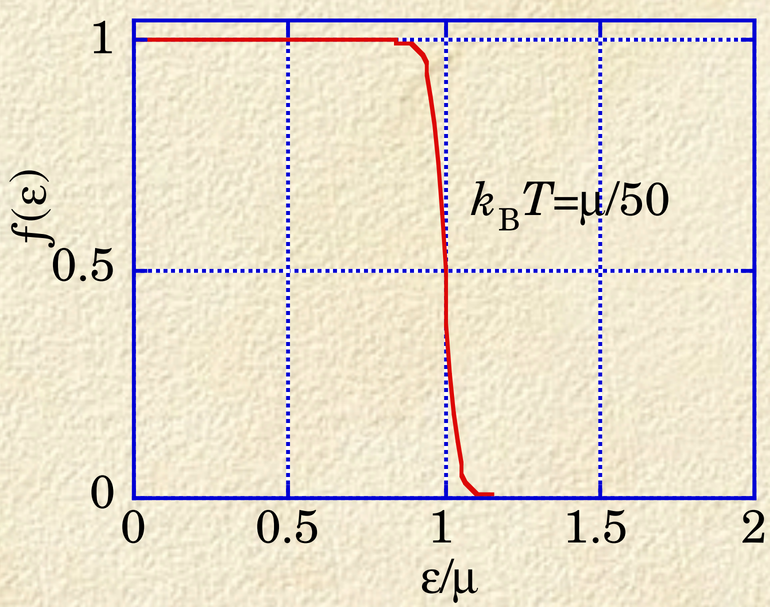
ε_i 軌道が空の場合の相対確率は、ギブス因子を使って、$p_i(0)=1$と書ける. また、占有されている場合は：$p_i(1)=e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}$、従って、平均の粒子数 $f_{FD}(\varepsilon_i)$ は、

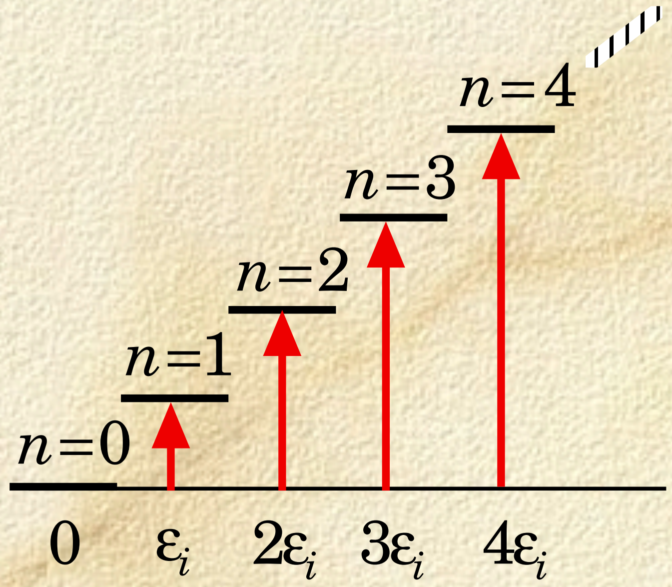
$$e^{N(\mu-\varepsilon_i)}=1, \quad \text{at } N=0$$

$$f_{FD}(\varepsilon_i)=\frac{0\times p_i(0)+1\times p_i(1)}{p_i(0)+p_i(1)}=\frac{e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}}{1+e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}}=\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T}+1}$$

で与えられる. この式は、独立なN個の軌道について共通に成り立つ.







$\boxed{\text{Bose}}$ 粒子が従う、
Bose-Einstein（ボーズ-アインシュタイン）分布

温度 T の熱浴と接触していて、相互作用が弱く、互いに独立に考えることが可能なN個の軌道の内の 1 つ、ε_i $(i=1, 2, 3, \cdots, N)$ を占有するボーズ粒子数（n：任意）の平均値を考えよう．

0から無限個（全粒子数を十分に大きい数で代表して）までのボーズ粒子が、軌道ε_iを占有する場合のギブス因子の和（大きな状態和）は、

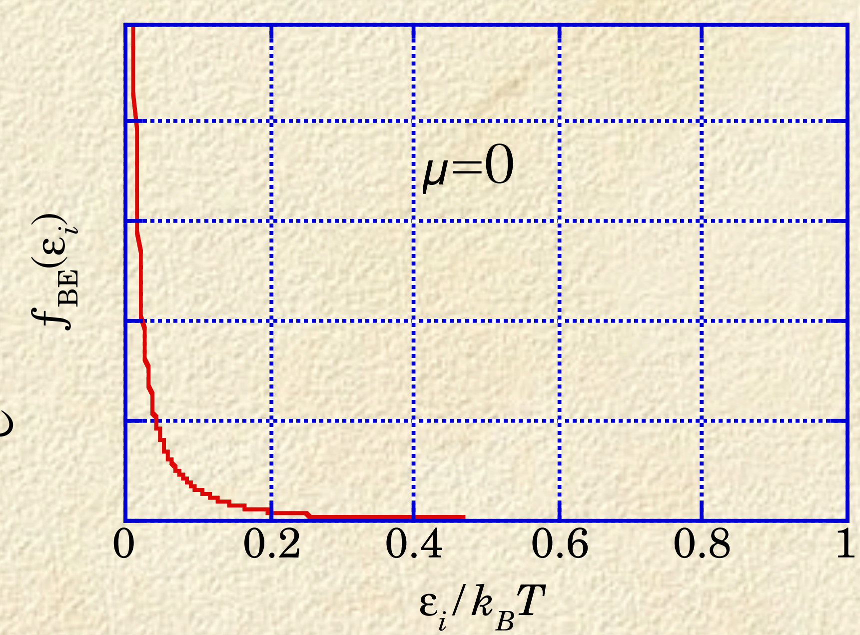
$$Z=\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}},\quad (x=e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T})$$

と書ける．そうすると、軌道ε_iを占有するボーズ粒子数の平均値 $f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon_i)$ は、

$$f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon_i)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}=\frac{x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}=\frac{x\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}}$$

$$=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x^{-1}-1}=\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T}-1},$$

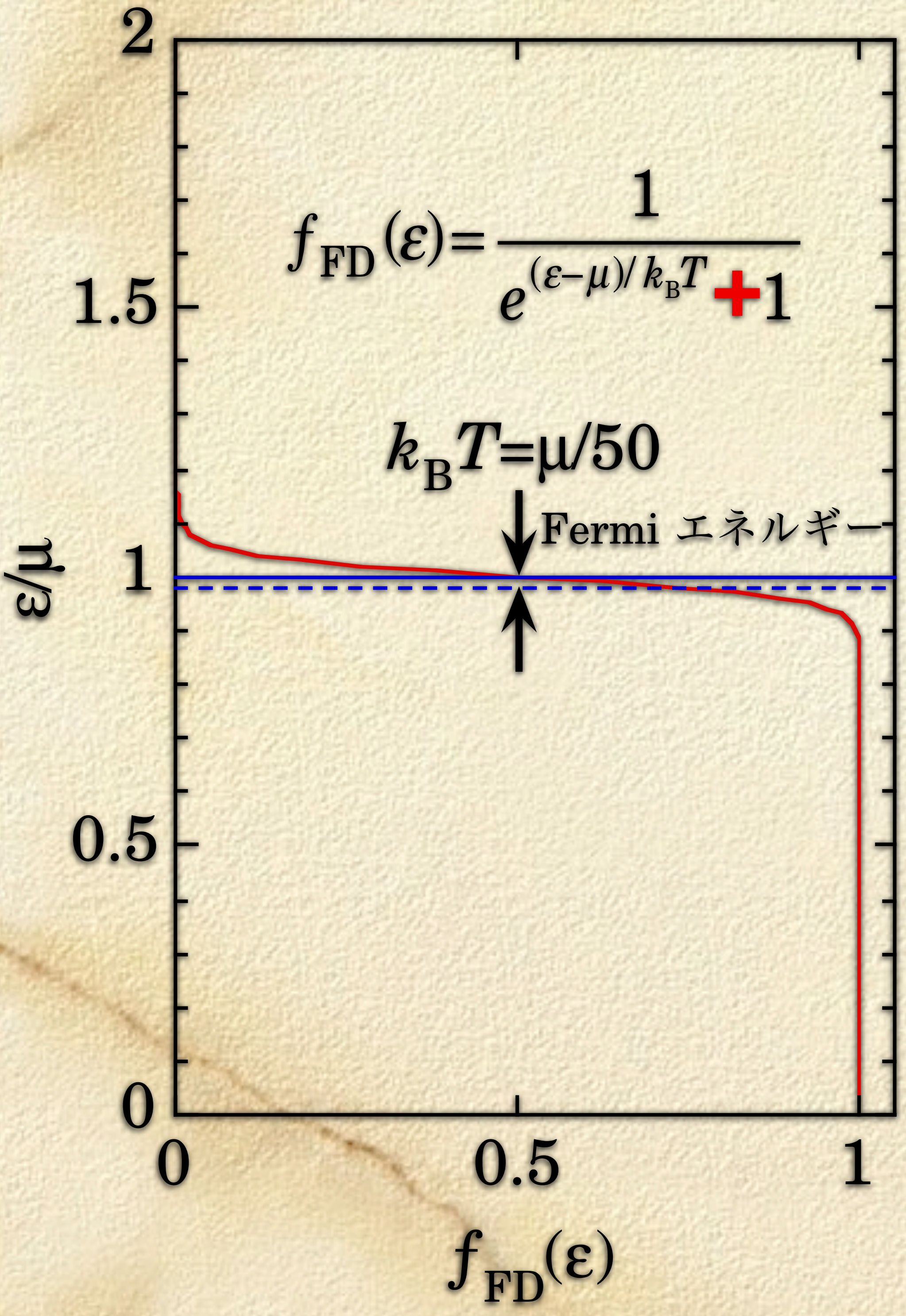
と求められ、ボーズ・アインシュタイン分布が得られる．この式もN個の軌道に入るボーズ粒子が互いに独立なので共通に成り立つ．化学ポテンシャル μ は、全粒子数がN個になるように決まる．



○ ＦＤ分布とＢＥ分布の違い

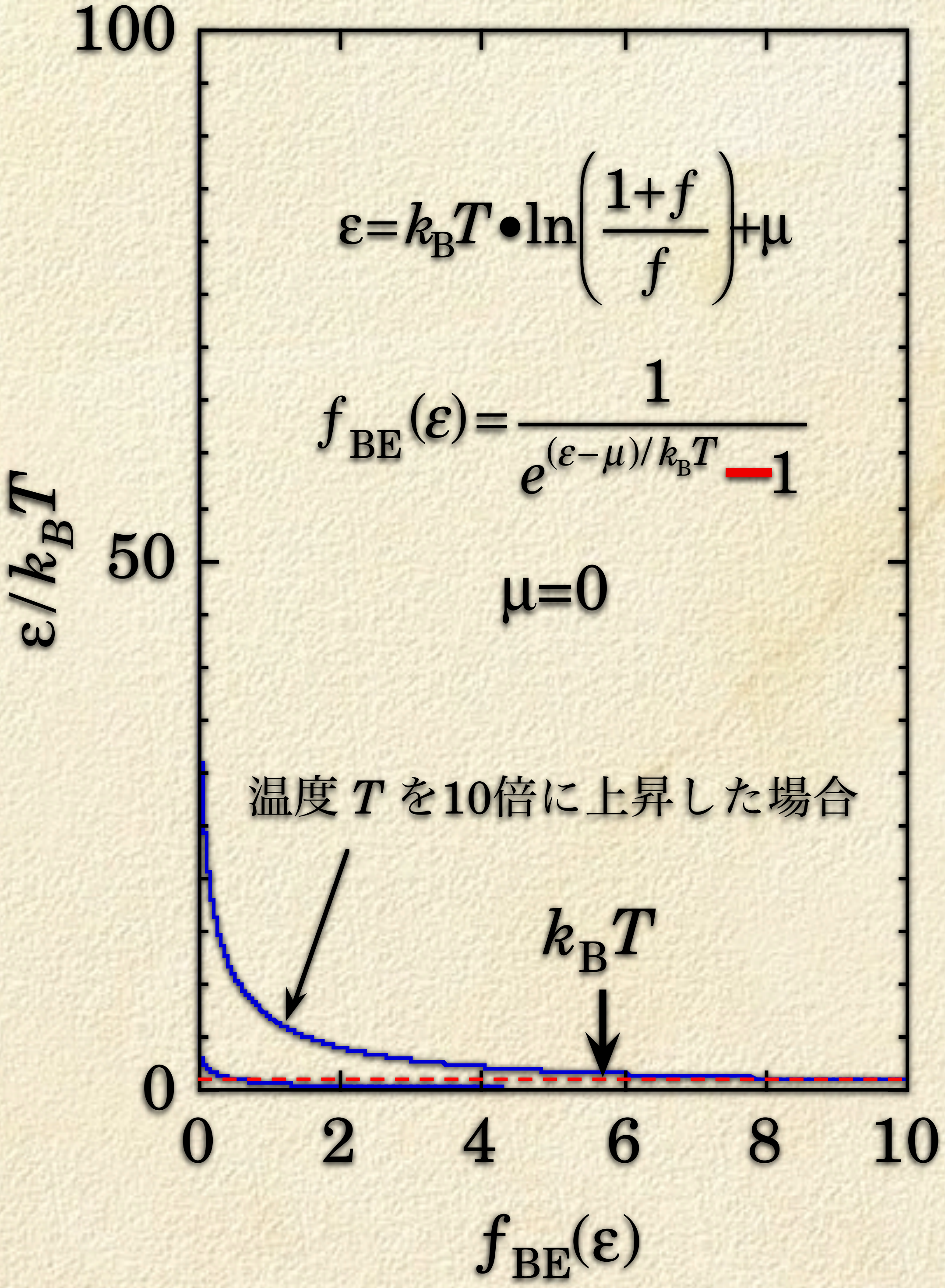
フェルミ・ディラック分布

金属電子, 陽子, 中性子, ^{3}Heなど



ボーズ・アインシュタイン分布

^{4}He, フォトン, フォノンなど



○ ボーズ・アインシュタイン凝縮

アインシュタイン　（１９２４年）

ボーズ気体のきわめて著しい凝縮現象の指摘

$\Longrightarrow$　ボーズ・アインシュタイン凝縮

＜大雑把な議論＞

ボーズ・アインシュタイン分布（右図参照）

各軌道内の占有粒子数　$\propto$　$k_B T$

高温では、占有確率 f 非常に大（右図 $k_B T$=50 参照）

化学ポテンシャル μ　$\Longrightarrow$　負（f を減らす効果）

ところが

十分低温　f が極端に減少（右図 $k_B T$=1 参照）

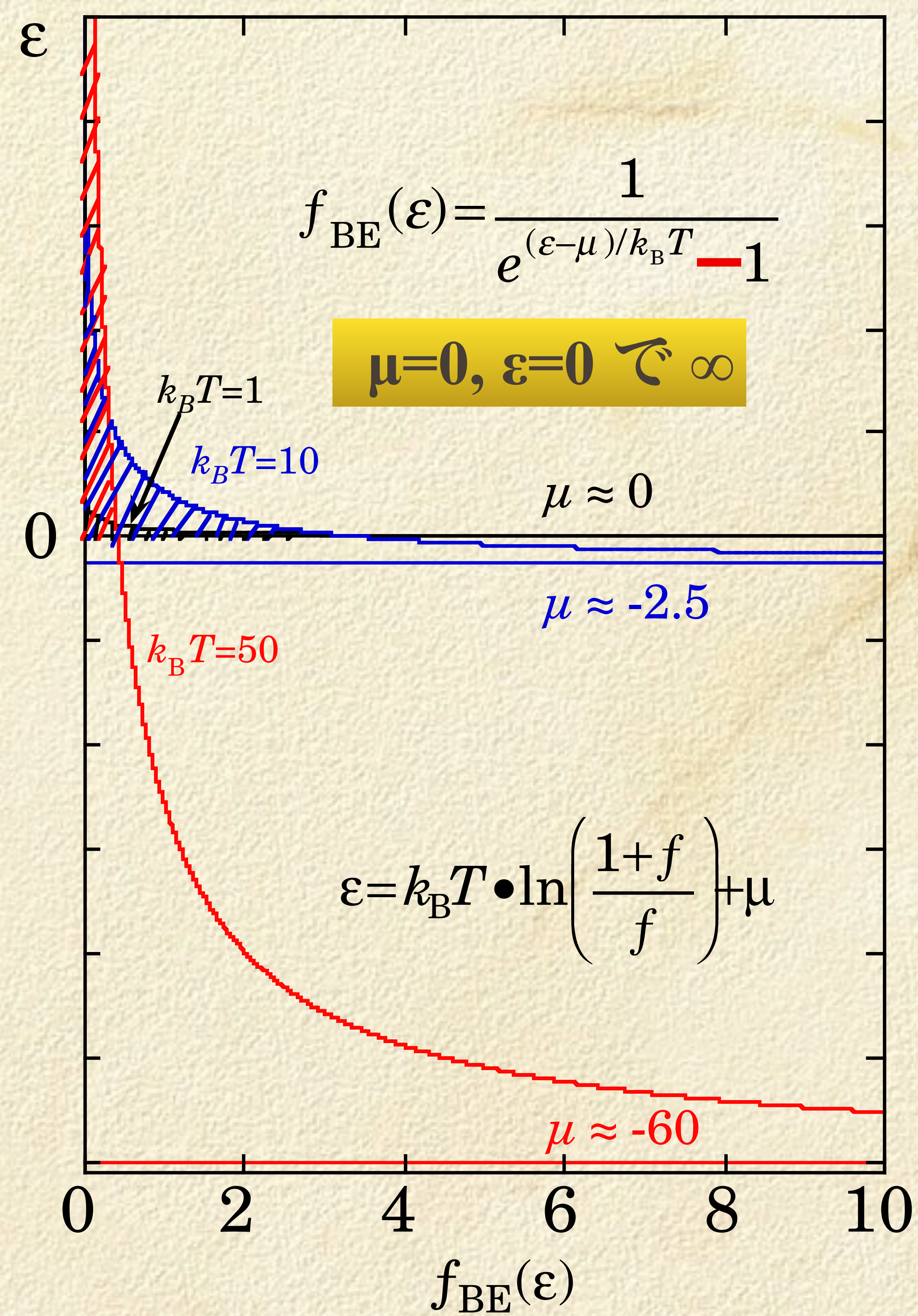
μ= 0　$\Longrightarrow$　f の面積小　全粒子 N を収容できず

$\Downarrow$

ε = 0 の軌道に収容（μ= 0 の時、無限に収容可）

注：実際には、エネルギー ε と軌道数は比例せず

状態密度が掛かる



○ ボーズ・アインシュタイン凝縮 状態密度

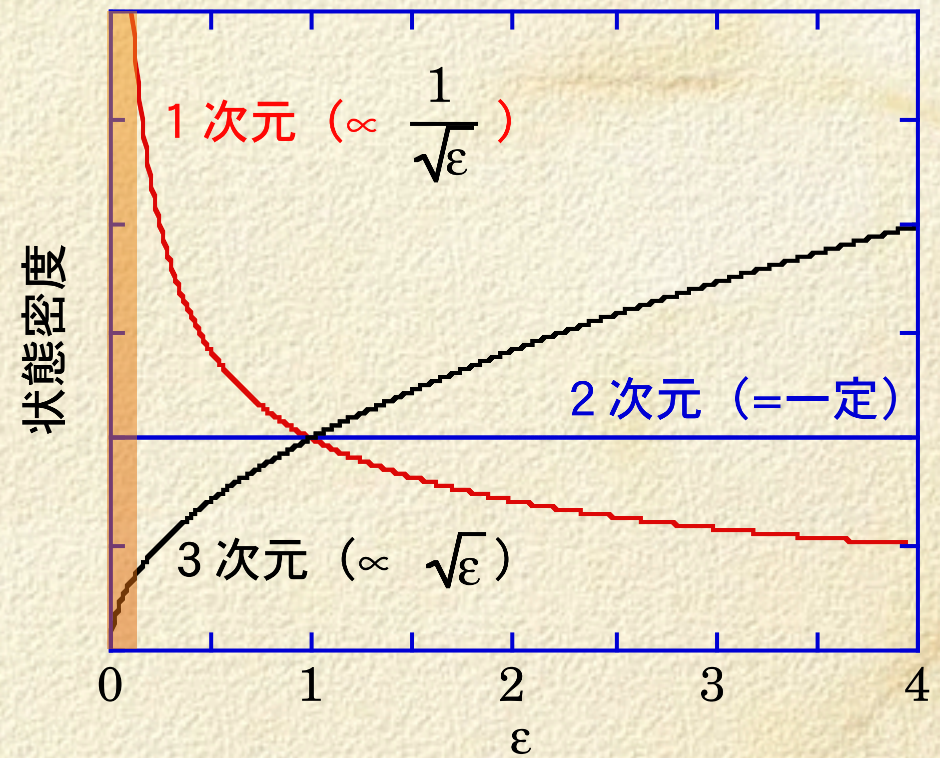
状態密度 $D(\varepsilon)$　単位エネルギー $\Delta\varepsilon$ の中の軌道数

1 次元の場合：（「量子性」を参照）

$$\varepsilon_n=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2,\quad (n=0,1,2,\bullet\bullet\bullet),\ (1)$$

$$\Longrightarrow\quad D(\varepsilon)\propto 1/\sqrt{\varepsilon}$$

明確なボーズ・アインシュタイン凝縮は起こらない

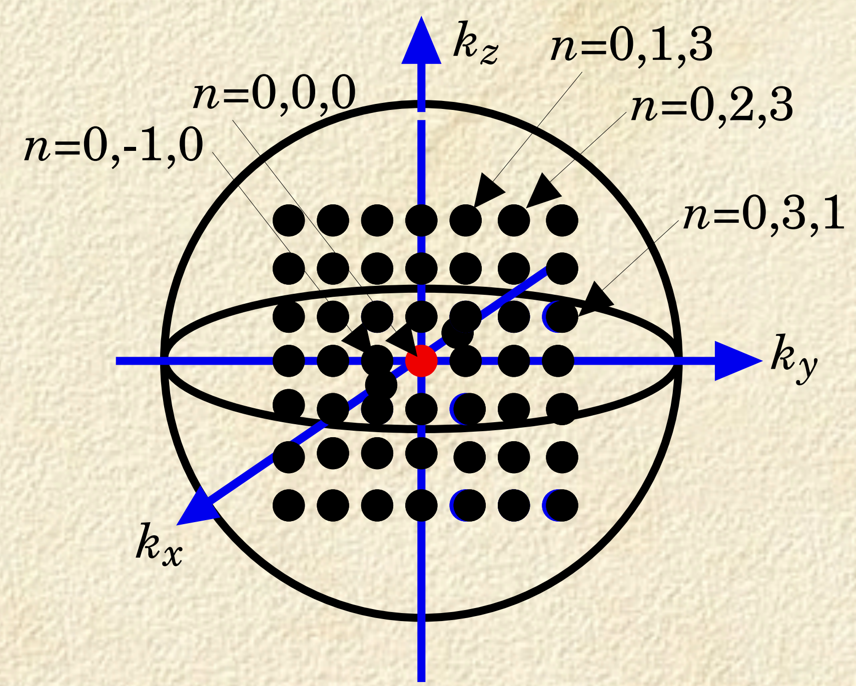


3 次元の場合：$\varepsilon_n=\dfrac{\hbar^2(k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2)}{2m}=\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^2(n_x{}^2+n_y{}^2+n_z{}^2)$

x, y, z の 3 方向　⟹　軌道数が急速に n と共に増大

$$\Longrightarrow\quad D(\varepsilon)\propto\sqrt{\varepsilon}$$

$\varepsilon=0$ でゼロになるのは、ε が大きいところで急激に増加するため、相対的に影響が減少した.



○ボーズ・アインシュタイン凝縮　3次元 BE 気体

全粒子数 N

液体 ^{4}He, 1 cm^3、約2.18×10^{22}個

$$m_{{}^4\mathrm{He}}\approx 4m_p=6.68\times10^{-27}\ [\mathrm{kg}]$$

$$\hbar=1.05\times10^{-34}\ [\mathrm{J\bullet s}]$$

$$k_B=1.38\times10^{-23}\ [\mathrm{J/K}]$$

$$N=N(\varepsilon=0)+N(\varepsilon\neq0)=\frac{1}{e^{-\mu/k_BT}-1}+\sum_{n_z=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_x=1}^{\infty}f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{-\mu/k_BT}-1}+\int_0^{\infty}d\varepsilon D(\varepsilon)f(\varepsilon)$$

基底状態の占有数：$N(\varepsilon=0)$

全励起状態の占有数：$N(\varepsilon\neq0)$

$$N(\varepsilon\neq0)=\sum_{n_z=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_x=1}^{\infty}f(\varepsilon)=\int_0^{\infty}d\varepsilon D(\varepsilon)f(\varepsilon)=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}-1}$$

より、

$$N(\varepsilon\neq0)=0.327V\left(\frac{2mk_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

凝縮温度 Tc で、励起状態にちょうど粒子数 N が入るので、

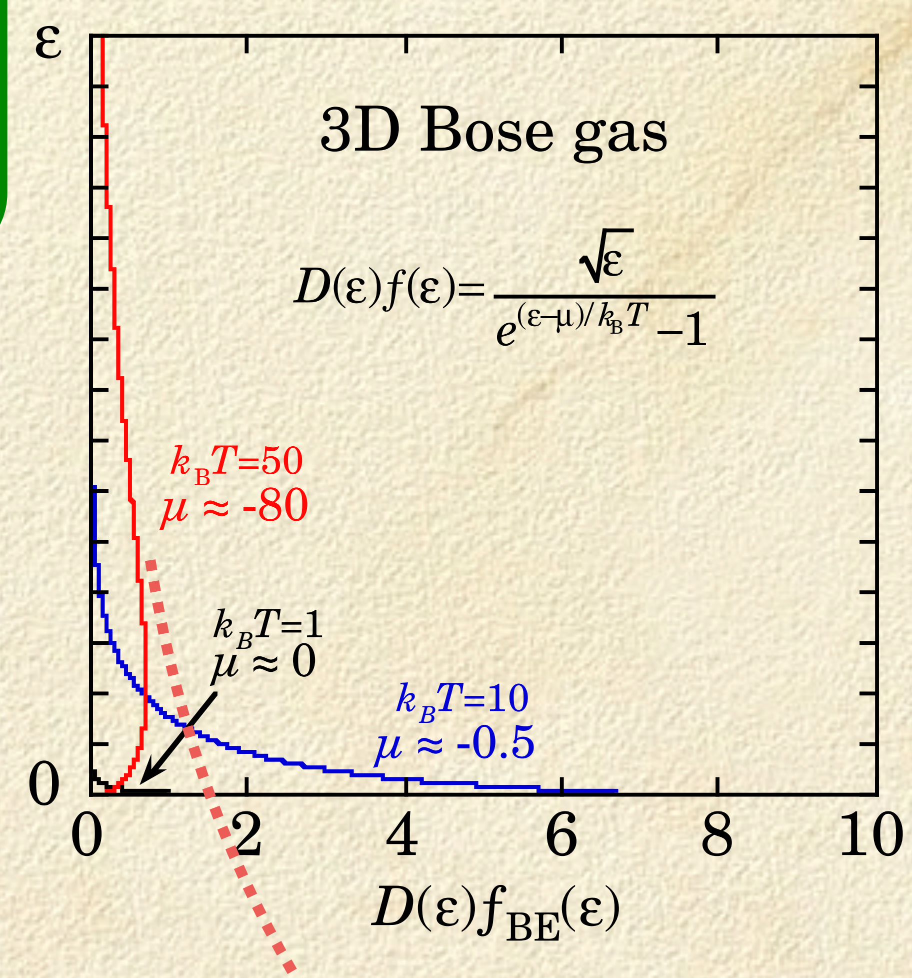
$$T_0=\frac{\pi\hbar^2}{2mk_B}\left(\frac{N}{0.327V}\right)^{\frac{2}{3}}=3.1\ [\mathrm{K}].$$

この数値は実験値の 2.17 K と良く一致する.

＜参考＞　最初の励起エネルギーは、$\varepsilon_n=3.47\times10^{-37}$ [J]

温度になおして、$\varepsilon_n/k_B=2.51\times10^{-14}$ [K] <<< 3.1 K

超伝導とは大違い



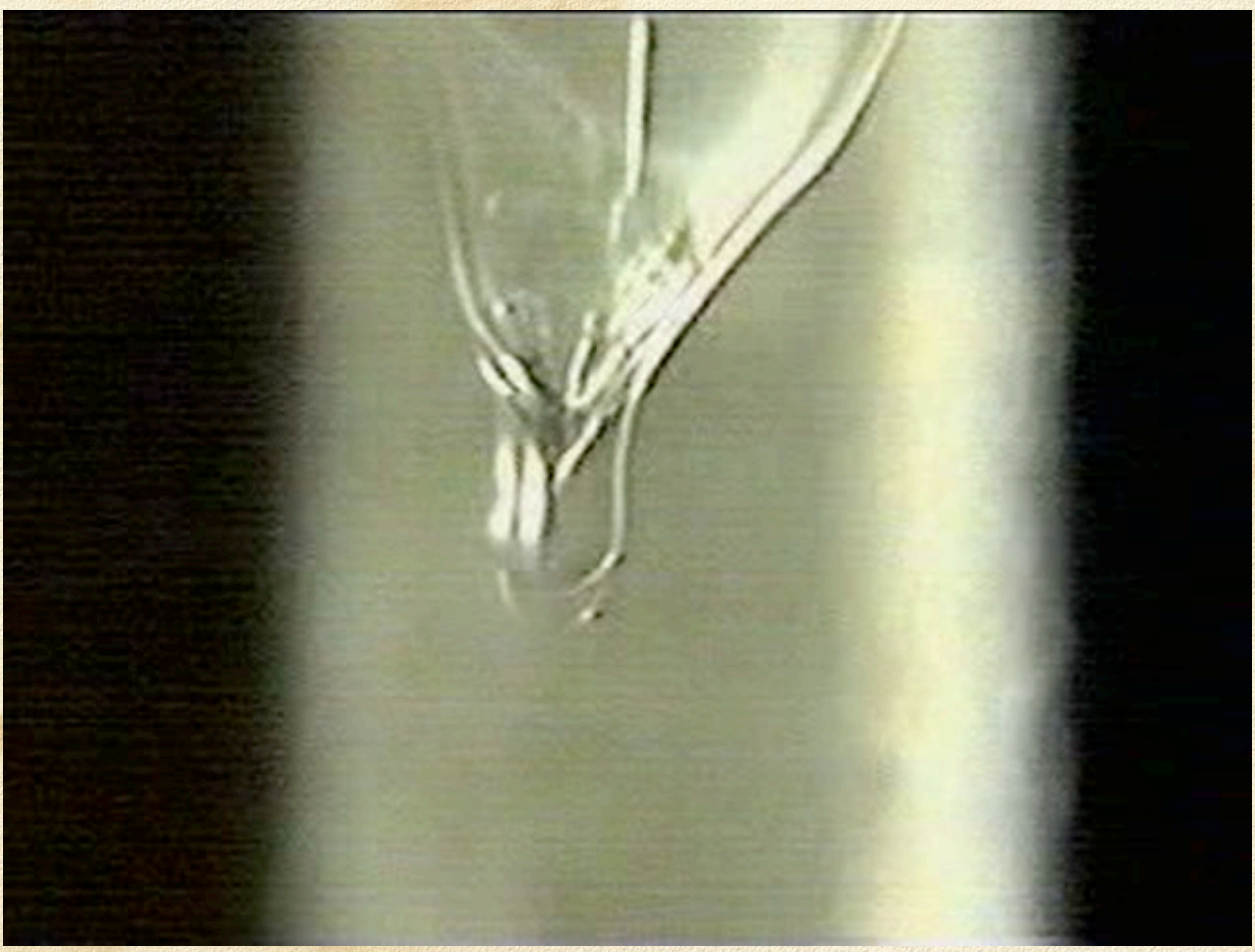
ヘリウム ^{4}He の超流動：原因

◎ 3次元液体ヘリウム

1次元系であれば
基底状態と励起状態の占有数の比は線形に変化（$\sim 1 - \varepsilon/k_{\mathrm{B}}T$）
=>　急激な変化は生じない

3次元的な k-空間：$k_{\mathrm{B}}T$ が小さくなると、励起状態の状態数が急減

超流動の素励起は量子渦：ロトン



$1\ (mm^3)/6\ (sec)$

容器の直径は約 7 mm なので、円周長は約 20 mm

He が単原子層の膜厚で流れているとすると、約 4 Å = $4x10^{-8}$ cm = $4x10^{-7}$

mm と円周長の 20 mmを掛けて、

$20x4x10^{-7} = 8x10^{-6}\ mm^2$

の断面積を持つ流れになる。そうすると、1秒間に 1/6 mm^3 溜まるには、

$1/6/(8x10^{-6}) = 2x10^4\ mm/s = 20\ m/s$

が得られる。