

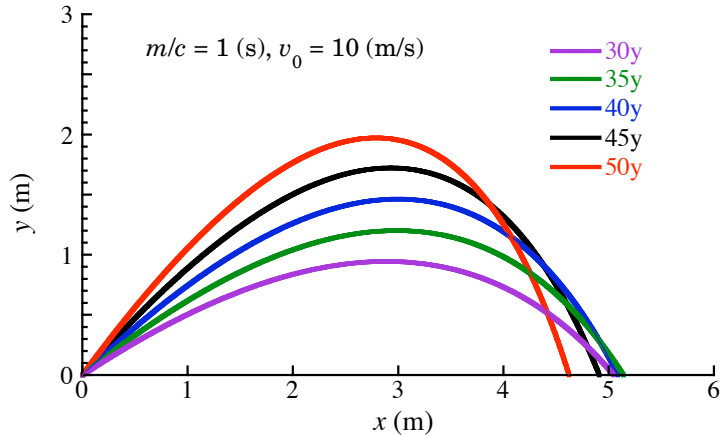
「粘性抵抗と慣性抵抗」のプリントの、粘性抵抗の場合の運動を図にすることを試みよう。速度に比例する粘性抵抗による空気抵抗は、比較的取り扱いやすい。投げ上げ運動の軌跡を下図に示した。用いた式は、(6) 式に適度な減衰のパラメータを入れた。

$$\begin{aligned} x &= \frac{mv_{0x}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right), \\ y &= \frac{mv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{mg}{c} \left(t - \frac{m}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

(6) の係数に含まれる x, y 方向の初速度に、投げ上げの角度情報、 $v_{0x} = v_0 \cos\theta, v_{0y} = v_0 \sin\theta$ が入る。計算結果を見ると、空気抵抗が無いときには45度方向が最も飛距離が長くなるが、空気抵抗によって、これらのパラメータでは、角度が小さい35度程度で飛距離が長くなっている。単純な説明としては、空気抵抗による飛行中の積算減速量を減らすために滞空時間を短くする方がよい、と言えそうだ。別の表現をすると、角度が45度の時は、初速度の水平成分と鉛直成分は等しいので摩擦力は同じだが、時間が経つにつれ、鉛直成分のみが重力により減少し、鉛直成分に働く摩擦力は頂点に向かって減少する。それに対して、水平成分は摩擦以外の原因では変化しないため、常に大きな摩擦力を受け続ける。結局、摩擦による滞空時間の減少は小さく、水平速度成分を増し減速前に距離を稼ぐ方が飛距離は長くなる。

$$\begin{aligned} x &= 10 \cos\theta (1 - \exp(-t)) \\ y &= 10 \sin\theta (1 - \exp(-t)) - 10 (t - (1 - \exp(-t))) \end{aligned}$$

この式を図にしたので、 $C/m=1 [1/s], v_0 = 10 [m/s]$, としたことに相当する。即ち、垂直投げ上げでは約1秒で頂点に達し、空気抵抗が無ければ、その時の高さは、約5m、水平方向は約10m飛ぶはずであるが、約半分の5mまでしか飛んでいない。



遠投の最適角度の摩擦依存性を解析的に検討した。角度を $\pi/4$ からずらしたときに最適角度はどちらにずれるのか？判断の見通しを良くするために、指数関数をマクローリン展開し、時間 t の2次まで残した。即ち、

$$\begin{aligned} x &= \frac{mv_{0x}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right), \\ y &= \frac{mv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{mg}{c} \left(t - \frac{m}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

に於いて、 y と x の関係を調べるために $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ と指数関数を展開した。

$$\begin{aligned} x &= \frac{mv_{0x}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \approx \frac{mv_{0x}}{c} \left(1 - \left(1 - \frac{c}{m}t + \frac{1}{2!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 t^2 \right) \right) = v_{0x}t - \frac{cv_{0x}}{2m} t^2 \\ y &= \frac{mv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{mg}{c} \left(t - \frac{m}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \right) \\ &\approx \frac{mv_{0y}}{c} \left(1 - \left(1 - \frac{c}{m}t + \frac{1}{2!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 t^2 \right) \right) - \frac{mg}{c} \left(t - \frac{m}{c} \left(1 - \left(1 - \frac{c}{m}t + \frac{1}{2!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 t^2 \right) \right) \right) \\ &= v_{0y}t - \frac{c}{2m} t^2 - \frac{g}{2} t^2 = \left(v_{0y} - \left(\frac{cv_{0y}}{2m} + \frac{g}{2} \right) t \right) t \end{aligned}$$

共に t の2次式なので、時間を x で表し y に代入するのは得策ではない。そこで、着地点では $y = 0$ になることから着地までの時間を求め、到達距離を求めよう。即ち、

$$t = \frac{2m}{c} \frac{v_{0y}}{v_{0y} + \frac{mg}{c}}$$

を x に代入して着地点は、

$$x = v_{0x}t - \frac{cv_{0x}}{2m} t^2 = v_{0x}t \left(1 - \frac{c}{2m} t \right) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g + \frac{cv_0 \sin \theta}{m}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{mg}{cv_0 \sin \theta}} \right)$$

で与えられる。摩擦が無くなると $c = 0$ になり、 $x = v_0^2 \sin 2\theta / g$ に帰着する。摩擦が入ると、分母が $g \rightarrow g + (cv_0/m) \sin \theta$ に変わると同時に、飛距離を減少させる第2項が現れる。 $\sin 2\theta$ は $\theta = \pi/4$ で最大値を取り、その角度の前で、 $\sin 2\theta = \sin(\pi/2 \pm 2\Delta\theta) = \cos(\pm 2\Delta\theta) \approx 1$ で、分母の $\sin \theta$ は、 $\sin(\pi/4 \pm \Delta\theta) \approx \sin(\pi/4)(1 \pm \Delta\theta)$ で変化する。従って $-\Delta\theta$ の方向、 $\theta < \pi/4$ の方向に x の最大値があることになる。これは、同時に括弧内の第2項も減少させるので、最遠投角度が摩擦によって $\theta \leq \pi/4$ の方向にずれていくことが結論できる。

$y(x)$ の形による考察

(1) 式から時間を消去して、 $y(x)$ の形を求め、飛距離の角度依存性を考察しよう。まず、 x を時間について解くと、

$$\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) = \frac{c}{mv_{0x}}x$$

$$e^{-\frac{c}{m}t} = 1 - \frac{c}{mv_{0x}}x$$

$$t = -\frac{m}{c} \ln \left| 1 - \frac{c}{mv_{0x}}x \right|$$

が得られる。これを (1) 式の y に代入して、

$$y = \frac{mv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{mg}{c} \left(t - \frac{m}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)\right) = \frac{mv_{0y}}{c} \frac{c}{mv_{0x}}x + \frac{m^2g}{c^2} \ln \left| 1 - \frac{c}{mv_{0x}}x \right| + \frac{m^2g}{c^2} \frac{c}{mv_{0x}}x$$

と x の関数で表現できる。球の到着点では $y = 0$ なので、満たすべき条件は、

$$\frac{mv_{0y}}{c} \frac{c}{mv_{0x}}x + \frac{m^2g}{c^2} \ln \left| 1 - \frac{c}{mv_{0x}}x \right| + \frac{m^2g}{c^2} \frac{c}{mv_{0x}}x = 0$$

与えられる。式を整理して、以下のように変形する。

$$\left(\frac{c^2}{m^2g} \frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{c}{mv_{0x}}\right)x = -\ln \left| 1 - \frac{c}{mv_{0x}}x \right|$$

ここで、

$$A = \frac{c^2}{m^2g} \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{c^2}{m^2g} \tan \theta, \quad (v_{0y} = v_0 \sin \theta, \quad v_{0x} = v_0 \cos \theta)$$

$$B = \frac{c}{mv_{0x}} = \frac{c}{mv_0 \cos \theta}$$

と置くと (次元は共に、1/m)、条件式は、

$$(A+B)x = -\ln(1-Bx)$$

と簡単化される。次に、 x の角度依存性を見通しを良くするために、対数部分をマクローリン展開する：

$$\ln(1-X) = -X - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} + \dots$$

従って、

$$(A+B)x = -\ln(1-Bx) \cong Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{3}x^3$$

と近似できる。右辺を x の2次までで近似すると、

$$\frac{B^2}{2}x \left(x - \frac{2A}{B^2}\right) = 0$$

より、

$x = 0$ 、

$$x = \frac{2A}{B^2} = 2 \frac{c^2}{m^2g} \tan \theta \frac{m^2v_0^2 \cos^2 \theta}{c^2} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

が得られる。これは、摩擦が無い時の飛距離に等しく、2次までには摩擦の効果が含まれないことが分かる。そこで、3次まで含めて解くと (本来、 x は2つしか物理的に意味のある解は無い。しかし、3次までで切り上げたため、3つ目が現れる。)、

$$\frac{B^3}{3}x^3 + \frac{B^2}{2}x^2 - Ax = \frac{B^3}{3}x \left(x^2 + \frac{3}{2B}x - \frac{3A}{B^3}\right) = 0$$

$x = 0$ と、

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2B}\right)^2 + \frac{12A}{B^3}} \right) = \frac{3}{4B} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2B}{3}\right)^2 \frac{12A}{B^3}} \right) = \frac{3}{4B} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16A}{3B}} \right)$$

が得られる。+記号の最も大きな x の値は、対数のマクローリン展開を3次で切り上げた人為的な解で、物理的意味は無い。見通しを良くするために、平方根をマクローリン展開しよう：

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \dots$$

そうすると、

$$x \cong \frac{3}{4B} \left(-1 + \left(1 + \frac{8A}{3B} - \frac{1}{8} \left(\frac{16A}{3B} \right)^2 \right) \right) = \frac{2A}{B^2} \left(1 - \frac{4A}{3B} \right) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{cv_0 \sin \theta}{mg} \right)$$

が、摩擦の最初の効果を現す飛距離を与える。 $\sin 2\theta$ は、 $\theta = \pi/4$ の近辺では大小どちらに変化させても減少量は等価である。しかし、摩擦 c の効果による飛距離の減少は、 $\sin \theta$ に依存しているため、角度が $\theta = \pi/4$ よりも小さくした方が摩擦による飛距離の減少は抑えられる。この減少項は、 v_{0y} に比例している。それを、重力加速度 g で割っているため、飛行時間に比例している。長く飛行しているほど、摩擦による減速が重要になることを示唆していると考えられる。