粘性抵抗と放物線 5/29/16

「粘性抵抗と慣性抵抗」のプリントの、粘性抵抗の場合の運動を図にすることを試みよう。速度に比例する粘性抵抗による空気抵抗は、比較的取り扱いやすい。投げ上げ運動の軌跡を下図に示した。用いた式は、(6) 式に適度な減衰のパラメータを入れた。

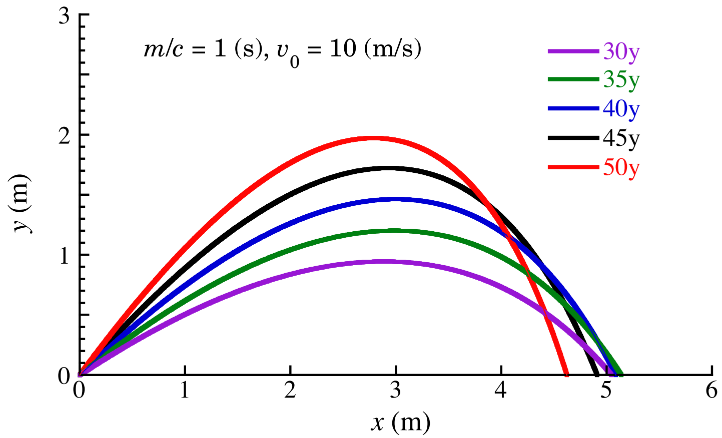
$$x=\frac{mv_{0x}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right),\quad y=\frac{mv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)-\frac{mg}{c}\left(t-\frac{m}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)\right),\qquad (6)$$

(6) の係数に含まれる x, y 方向の初速度に、投げ上げの角度情報、$v_{0x}=v_0\cos\theta, v_{0y}=v_0\sin\theta$ が入る。計算結果を見ると、空気抵抗が無いときには45度方向が最も飛距離が長くなるが、空気抵抗によって、これらのパラメータでは、角度が小さい35度程度で飛距離が長くなっている。

単純な説明としては、角度が45度の時は、初速度の水平成分と鉛直成分は等しいので当初は摩擦力は両者に等しく効く。しかし、鉛直成分のみが重力により減少し、頂点で摩擦力はゼロになり、その後は摩擦力が落下速度の増加を抑える様に働く。それに対して、水平成分は常に大きな摩擦力を受け続ける。結果として、摩擦による滞空時間の減少は小さくなるので、水平速度成分を増し減速前に距離を稼ぐ方が飛距離は長くなる。

$x = 10\cos\theta(1-\exp(-1t))$
$y = 10\sin\theta(1-\exp(-1t)) - 10\,(t-(1-\exp(-1t)))$

この式を図にしたので、C/m=1 [1/s], v_0 = 10 [m/s], としたことに相当する。
即ち、垂直投げ上げでは約１秒で頂点に達し、空気抵抗が無ければ、その時の高さは、約５m、水平方向は約10m飛ぶはずであるが、約半分の5mまでしか飛んでいない。



マクローリン展開による解析的な導出

遠投の最適角度の摩擦依存性を解析的に検討した。角度を $\pi/4$ からずらしたときに最適角度はどちらにずれるのか？判断の見通しを良くするために、指数関数をマクローリン展開し、時間 t の２次まで残した。即ち、

$$x=\frac{mv_{0x}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right),\quad y=\frac{mv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)-\frac{mg}{c}\left(t-\frac{m}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)\right),\qquad (1)$$

に於いて、y と x の関係を調べるために $e^x \cong 1+x+\frac{x^2}{2!}$ と指数関数を展開した。（$x<1$, 即ち、$cgt_0<mg$、cgt_0は、鉛直方向に働く摩擦力の大きさ程度で、重力よりも小さい場合に相当）

$$x=\frac{mv_{0x}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)\cong\frac{mv_{0x}}{c}\left(1-\left(1-\frac{c}{m}t+\frac{1}{2!}\left(\frac{c}{m}\right)^2t^2\right)\right)=v_{0x}t-\frac{cv_{0x}}{2m}t^2$$

$$y=\frac{mv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)-\frac{mg}{c}\left(t-\frac{m}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)\right)$$

$$\cong\frac{mv_{0y}}{c}\left(1-\left(1-\frac{c}{m}t+\frac{1}{2!}\left(\frac{c}{m}\right)^2t^2\right)\right)-\frac{mg}{c}\left(t-\frac{m}{c}\left(1-\left(1-\frac{c}{m}t+\frac{1}{2!}\left(\frac{c}{m}\right)^2t^2\right)\right)\right)$$

$$=v_{0y}t-\frac{cv_{0y}}{2m}t^2-\frac{g}{2}t^2=\left(v_{0y}-\left(\frac{cv_{0y}}{2m}+\frac{g}{2}\right)t\right)t$$

共に t の２次式なので、時間を x で表し y に代入するのは得策ではない。そこで、着地点では $y=0$ になることから着地までの時間を求め、到達距離を求めよう。即ち、

$$t=\frac{2m}{c}\frac{v_{0y}}{v_{0y}+\frac{mg}{c}}$$

を x に代入して着地点は、

$$x=v_{0x}t-\frac{cv_{0x}}{2m}t^2=v_{0x}t\left(1-\frac{c}{2m}t\right)=\frac{v_0^{\,2}\sin2\theta}{g+\frac{cv_0\sin\theta}{m}}\left(1-\frac{1}{1+\frac{mg}{cv_0\sin\theta}}\right)$$

で与えられる。摩擦が無くなると $c=0$ になり、$x=v_0^2\sin2\theta/g$ に帰着する。摩擦が入ると、分母が $g\to g+(cv_0/m)\sin\theta$ に変わると同時に、飛距離を減少させる第２項が現れる。$\sin2\theta$ は $\theta=\pi/4$ で最大値を取り、その角度の前後で、$\sin2\theta=\sin(\pi/2\pm2\Delta\theta)=\cos(\pm2\Delta\theta)\approx1$ で、分母の $\sin\theta$ は、$\sin(\pi/4\pm\Delta\theta)\approx\sin(\pi/4)(1\pm\Delta\theta)$ で変化する。従って $-\Delta\theta$ の方向、$\theta<\pi/4$ の方向に x の最大値があることになる。これは、同時に括弧内の第２項も減少させるので、最遠投角度が摩擦によって $\theta\le\pi/4$ の方向にずれていくことが結論できる。