単振動の運動方程式 6/11/13

天井から吊した振り子やバネの先に付けた錘の運動は、**単振動の運動方程式**を満たす。最も単純な系は**理想的なバネ**である。右図のように、質量の無視できるバネの先端に付けた質量 m の質点の平衡位置 x_0 から $x = x' - x_0$ だけバネが伸ばされると、それに比例した平衡位置へ戻ろうとする**復元力** $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$ が質点に働く。従って、運動方程式は、

$$d^2x/dt^2 = F/m = -(k/m)x \qquad (1)$$

となる。

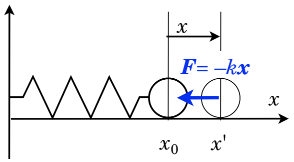

図１：バネと復元力

同様に図２の様に、天井から吊した質量の無視できる長さ ℓ の糸の先端に質量 m の質点を付けた振子も、振動の振幅が小さい場合には、近似的に**単振動**と考えて解析することが出来る。振り子の運動は、点線で表した弧 s 上に限定された**束縛運動**なので、弧に沿って定義された**曲線座標**上の運動を考える。曲線座標上の運動は**加速度系**であり，**見掛けの力**の遠心力が現れる[注1]。従って、糸の**張力**は，質点に働く**遠心力**と**重力**の糸方向成分 $mg\cos\theta$ の和に等しく、質点の運動には寄与しない。そこで，接線方向の力 $F_s = -mg\sin\theta$ がs 方向の運動方程式を与える。弧上の変位 $\boldsymbol{s}$ は、振り子の平衡位置からの振れ角 θ と $\boldsymbol{s} = \ell\theta$ の関係にあるので、運動方程式は、

$$d^2s/dt^2 = \ell d^2\theta/dt^2 = F/m = -g\sin\theta \qquad (2)$$

となる。ここで、ℓ = 一定、を使った。$\theta \ll 1$ (rad) の仮定の元で $\sin\theta \approx \theta$ の近似を行い（注：角度は無次元量。半径 (radius)で測った弧の長さが radian (rad)）、

$$d^2\theta/dt^2 = -(g/\ell)\sin\theta \approx -(g/\ell)\,\theta \qquad (3)$$

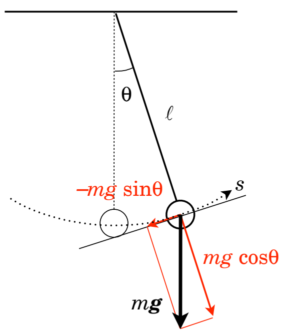

図２：振り子と復元力

と整理できる。変数 x と θ 、及び、右辺の係数 k/m と g/ℓ の２つの見かけの違いを除けば (1) と (2) は同一の微分方程式であることが分かる。即ち、これらの微分方程式は、

$$d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$$

と書くことが出来る。ここで，ω_0^2 は、**単位変位、単位質量当たりの復元力**を表し、単振動の最も大事なパラメータである。**バネの場合**には、$\omega_0^2 = k/m$ で、(1) 式第２辺、第３辺から単位質量 m、単位変位 x 当たりの復元力 ($= F/mx = k/m$) であることは容易に分かる。**単振り子の場合**も、単位質量 m、単位変位 $\ell\theta$ 当たりの復元力 ($= F/m\ell\theta = mg\theta/m\ell\theta = g/\ell$) は容易に確認できる。

これらの運動方程式を解く時に、**時間について両辺を直接積分する事は出来ない**。なぜならば、右辺の $x(t)$ は**時間の未知関数**であり，単振動の運動方程式を解かなければ決定できない関数だから。そこで、３つの解法を見ていこう。一つは、**発見的**方法、**エネルギー積分**の方法、もう一つは**特性方程式**の方法である。

１）発見的方法

運動方程式 (1) を見ると、求めたい関数 $x(t)$ を時間で２回微分すると、負号を付けた元の関数 $x(t)$ に比例している。この様な関数は、三角関数か指数関数以外には無いことに注目して、**（振子の場合は $x = l\theta$ であることに注意。特に、$v = l d\theta/dt$ となる点に要注意）**

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (4)$$

と置いてみる。運動方程式 (1) を満たすA, B, ωの条件を求める事が出来れば、それが運動方程式の解であることは明らかであろう。ここで、A, B は積分定数であり、運動方程式が時間の２回微分方程式である事から、２つの積分定数が必要になる。

次に、(4) 式が運動方程式を満たすべき条件を探すために、(1) 式に代入する。すると、左辺は、

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega_0^2 x$$

と求まる。右辺と等しいので、

$$\omega^2 = \omega_0^2$$

が、(4) 式が運動方程式を満たすための条件になる。即ち、

$$x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

が運動方程式 (1) の一般解を与える。一般解とは、２回積分した分の積分定数を含む解であり、任意の初期条件の元で、バネや振り子の運動を表現できる。

一般解に初期条件を代入すると、その初期条件の特(別)解が得られる。例えば、変位 x_0 で固定した状態から、時刻 t=0 に初速 v=0 で運動を開始する場合は、

$$x(0) = B = x_0$$
$$v(0) = dx/dt\,|_{t=0} = \omega_0(A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t)\,|_{t=0} = \omega_0 A = 0$$

から、

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t$$
$$v(t) = -\omega_0 x_0\sin\omega_0 t$$

が求まる。一方、時刻 t=0 で $x=x_0$、$v=v_0$ の場合には、

$$x(0) = B = x_0$$
$$v(0) = dx/dt\,|_{t=0} = \omega_0(A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t)\,|_{t=0} = \omega_0 A = v_0$$

より、この場合の特解は、

$$x(t) = (v_0/\omega_0)\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t$$
$$v(t) = v_0\cos\omega_0 t - \omega_0 x_0\sin\omega_0 t$$

と得られる。また、時刻 t=0 で x=0、$v=v_0$ の場合には、

$$x(t) = (v_0/\omega_0)\sin\omega_0 t$$
$$v(t) = v_0\cos\omega_0 t$$

の特解が得られる事は容易に示せる。