I.　回転運動

実験的に確かめられていること：ニュートンの運動方程式

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

回転運動もこの運動方程式に従う。

並進運動との対比

	並進運動	回転運動
運動の速さ	速度　$\boldsymbol{v}$	角速度　$\omega=\dfrac{v}{r}$
運動エネルギー	$\dfrac{1}{2}mv^2$	$\dfrac{1}{2}I\omega^2=\dfrac{1}{2}mv^2$　$(I=mr^2)$
運動の激しさ	運動量　$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$	角運動量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=I\boldsymbol{\omega}$
運動の変化	$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\sum\boldsymbol{F}$	$\dfrac{d(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum\boldsymbol{N}=\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})$

◎ **回転運動でも変わらない量:エネルギー** $\dfrac{m}{2}v^2=\dfrac{m}{2}r^2\omega^2=\dfrac{1}{2}I\omega^2$, $(v^2=r^2\omega^2, I=mr^2)$

○ 並進運動でも回転運動でも、速度 v [m/s] の質点の持つエネルギーは同じ。

異なるのは表現方法：　**並進運動**では「**速度** v」で運動の速さを表す

回転運動では「**角速度** ω [rad/s]」で回転の速さを表現

回転体における**速度** $\boldsymbol{v}$ は、回転軸からの距離 r に比例　＝＞　**角速度** $\boldsymbol{\omega}$ [rad/s] が便利

回転体の**速度** $\boldsymbol{v}$ [m/s]：「単位時間に進む角度×半径, $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{\theta}/dt\times\boldsymbol{r}=\omega\times\boldsymbol{r}$」

◎ **慣性モーメント** $\boldsymbol{I=mr^2}$ [kg•m²]：**回転のし難さ**　（**慣性質量** m [kg]：**加速のし難さ**）

回転半径が r で質量 m の**回転体**：速度 $v=r\omega$ に加速するのに要するエネルギー

$mv^2/2=\boldsymbol{mr^2}\omega^2/2$ $(=I\omega^2/2$ $(I=mr^2$ [kg•m²]$))$

慣性質量 $\boldsymbol{m}$ に比例するだけでなく、回転半径 $\boldsymbol{r}$ **の２乗**にも比例する。

同じエネルギーを加えても、$\boldsymbol{m}$と$\boldsymbol{r^2}$ に反比例して**角速度** $\boldsymbol{\omega}$ は増加**しにくい**。

◎ **角運動量** $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=I\boldsymbol{\omega}$：質点が**回転運動**する場合に**変化しない量**（次頁で示す）

運動量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ は、外力が全く働かない場合に**変化しない量**。

しかし、**常に向心力** $\boldsymbol{F}_{向}$ が働く**円運動**では、運動量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ は**方向**が**時々刻々**、**変化**するので、新たに**角運動量**を考える必要が出てくる。

◎ **回転の運動方程式**

回転運動を表現するのに適した運動方程式（回転の運動方程式）が、ニュートンの運動方程式からどの様に導かれるか考えよう。

円運動をしている場合は、回転の中心に向かう力、**向心力** $\boldsymbol{F}_{向}$ が常に質点に働くので、その他の外力 $\boldsymbol{F}$ と区別して書くと、

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}_{向}+\boldsymbol{F} \qquad (1)$$

となる。回転運動に適した方程式としては、$\boldsymbol{F}_{向}$ が露に出てこない事が望ましい。そこで、(1)式から $\boldsymbol{F}_{向}$ を消去しよう。

$\boldsymbol{F}_{向}$ を (1) 式から消すためには、$\boldsymbol{F}_{向}$ と平行なベクトル（例えば半径ベクトル $\boldsymbol{r}$）の外積を (1) 式の両辺に掛ければ良い ($\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{向}=rF_{向}\sin\theta=0$、$\because\theta=0$)。

(1) 式の両辺、左側から半径ベクトル $\boldsymbol{r}$ の外積を掛けてみよう：

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{向}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \qquad (\because \boldsymbol{r}/\!/\boldsymbol{F}_{向} \text{ なので } \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{向}=0)$$

ここで、$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ [N•m=kg•m²/s²] を、**力のモーメント**と定義する。一方、左辺は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}, \quad (\because \boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{P} \text{ なので } \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{P}=0)$$

から、**角運動量** $\boldsymbol{L}$ を用いて表現される。

結局、**回転の運動方程式**は $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を用いて、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}, \quad (N \text{ の大きさは } rF\sin\theta) \qquad (2)$$

と、**ニュートンの運動方程式**、$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$ に匹敵する単純な式が得られる。質点系の重心の運動は$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$ を、重心の周りの回転運動は$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ を使って解析することが出来る。

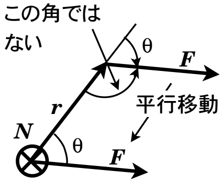


図1 力のモーメント $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ の定義

$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$ を用いると注)、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=I\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}=\boldsymbol{N}$$

の形にも変形出来る。

なお、この回転の運動方程式が、てこの原理や重心の定義も与えている。ここで、ベクトル $\boldsymbol{N},\boldsymbol{L},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}$ の方向は、回転方向が時計回りに見える位置から向う側に伸びる方向として定義される。また、(2) 式は円運動だけでなく、太陽系のような中心力場における回転運動等で一般的に成立ち、向心力以外の外力が無ければ $\boldsymbol{L}$ = const. も成立っている。（理由を考えよ）

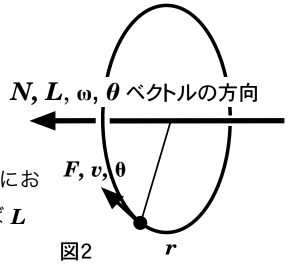


図2

注) $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=I\boldsymbol{\omega}$、

ここで、$m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}\bullet\boldsymbol{r})-m\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{r})=mr^2\boldsymbol{\omega}=I\boldsymbol{\omega}$, $(\boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{r}=0)$

重心

互いに内力を及ぼし合う質点の集まりが静止している。重力場中で、これらの質点の重心を支えると、重心の周りで回転運動をすることなく静止を続ける。そのような重心は (1), (2) 式によって導かれる。即ち、静止を続けるので、$\boldsymbol{L}$=0 と同時に、力のモーメントのベクトル和はゼロでなければならない。図３のように、剛体（変形しない質点の集まり）中の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ の質点 i に重力 $m_i\boldsymbol{g}$（$\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトル）が働いている場合を考えよう。回転の運動方程式 (2) 式を重力場中で考えてみると、

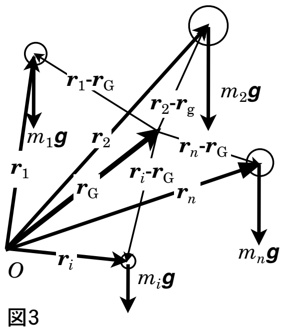


図3

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G)\times m_i\boldsymbol{g}=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\times\boldsymbol{g}=0 \tag{3}$$

となるので、括弧内を零と置くことにより、一様な重力場中で力のモーメントがゼロになる支点として重心

$$\boldsymbol{r}_G=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \tag{4}$$

が定義される。初期条件として、$\boldsymbol{L}$=0 であれば物体は静止を続ける。一方、それぞれの質点の並進運動の方程式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}=m_1\boldsymbol{g}+\sum_{j}^{n}F_{1j} \\ m_2\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}=m_2\boldsymbol{g}+\sum_{j}^{n}F_{2j} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ m_n\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_n}{dt^2}=m_n\boldsymbol{g}+\sum_{j}^{n}F_{nj} \end{cases} \tag{5}$$

ここで、F_{ij} は質点間の内力を示す。これらを加え合わせ (4) 式を用い、内力を消去すると、

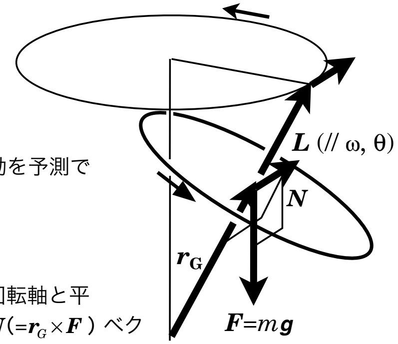
$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i=M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}=M\boldsymbol{g} \tag{6}$$

が得られる。ここで、$M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 、また、$\boldsymbol{r}_G$ は重心の位置ベクトルを表すので、剛体（変形しない質点の集まり）の運動方程式 (6) は、全ての質量が重心 $\boldsymbol{r}_G$ に集まっている場合と同じ並進運動をすることを示している。

一方、支える位置 $\boldsymbol{r}$ を重心点 $\boldsymbol{r}_G$ からズラすと回転運動が起こる。回転の運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ を (3) 式と同様に書き表し、そこに (3) 式を代入して $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}$ と置くと、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r})\times m_i\boldsymbol{g}=\sum_{i=1}^{n}((\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G)+(\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}))\times m_i\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r})\sum_{i=1}^{n}m_i\times\boldsymbol{g}=\Delta\boldsymbol{r}\times M\boldsymbol{g}=\boldsymbol{N}_r \tag{7}$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{N_r}$ は、重心 $\boldsymbol{r}_G$ に働く全重力 $M\boldsymbol{g}$ による、$\boldsymbol{r}$ を支点とした力のモーメントを表し、支点 $\boldsymbol{r}$ の回りの回転運動が $\boldsymbol{N_r}$ によって起きる事を表す。並進運動を表す (6) 式と回転運動の (7) 式は互いに独立であり、連立させると、回転を伴う並進運動を予測できる。



コマの歳差運動

回転の運動方程式が予測する角運動量ベクトル（回転軸と平行）の時間変化は、とても奇妙である。すなわち、$\boldsymbol{N}(=\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F})$ ベクトルの向きに角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の方向を $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}dt$ に変化させるが、実際に加えた力 $\boldsymbol{F}$ の方向とは垂直であるため、回転していない物体に力を加えた場合に予想される結果とは違っており、意外な感じを受ける。

コマもこの運動方程式に従う。コマの回転軸が傾いている場合には、良く知られているように、首振り運動（歳差運動）をする。その理由は、重心に働く重力が外力 $\boldsymbol{F}$ に相当するので、接地点から重心に向う回転半径ベクトル $\boldsymbol{r}_G$ と重力 $m\boldsymbol{g}$ の外積の「力のモーメント $\boldsymbol{N}$ 」が地面と平行になるためである。それがコマの回転軸と平行な角運動量の向きを変えるので、コマの回転軸が水平面内をぐるぐる回ることになる。