

回転運動をしているときの相対運動 I

空間に固定されている座標系(慣性系)を $O-xyz$ 、角速度 ω で回転している座標系(例えば自転する地球やメリーゴーラウンド)を $O'-x'y'z'$ とする。それぞれの軸の基本ベクトルはそれぞれ i, j, k, i', j', k' とする。 O' 系の基本ベクトル i', j', k' の時間変化率は(注1参照)

$$\frac{di'}{dt} = \omega \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \omega \times k'$$

なので、回転座標上の点 P の位置ベクトル r (地表の大気的位置ベクトルやメリーゴーラウンドの上を歩く子供の位置ベクトルの様に、回転座標と共に回転しながらその上を v' で運動している場合を考えている点に注意。)

$$r = xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k'$$

の時間変化率(質点 P の慣性系から見た速度)は

$$v = \frac{dr}{dt} = \left\{ \left(\frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k' \right) + \left(x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(v_x' i' + v_y' j' + v_z' k' \right) + \omega \times (x' i' + y' j' + z' k') \right\} = v' + \omega \times r$$

ここで、 $\omega \times r$ は静止座標から見た回転座標の速度、 v' は回転座標系上の点 P の速度。

これを使って慣性系 $O-xyz$ から見た加速度 a は、速度 v を微分して

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{d(\omega \times r)}{dt}$$

$$v' \text{ に } v_x' i' + v_y' j' + v_z' k' \text{ を代入して、 } \frac{dv_x'}{dt} i' + \frac{dv_y'}{dt} j' + \frac{dv_z'}{dt} k' \text{ を } a' \text{ (回転座標系 } O'-x'y'z' \text{ 上で見た点 P の相対加速度) と置くと}$$

の上で見た点 P の相対加速度)と置くと

$$a = a' + \omega \times v' + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} = a' + \omega \times v' + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times (v' + \omega \times r)$$

$$= a' + \frac{d\omega}{dt} \times r + 2\omega \times v' + \omega \times (\omega \times r)$$

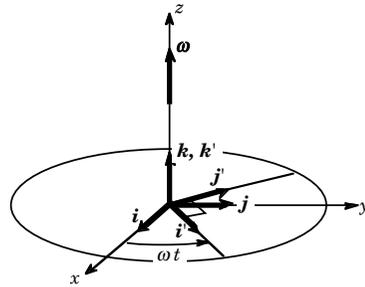
従って、相対加速度 a' は

$$a' = a - \frac{d\omega}{dt} \times r - 2\omega \times v' - \omega \times (\omega \times r)$$

相対加速度に質量 m をかけて、 $ma' = F$ を代入して、回転座標系上の運動方程式

$$ma' = F - 2m\omega \times v' - m\omega \times (\omega \times r) - m \frac{d\omega}{dt} \times r$$

慣性力(見掛の力): コリオリ力 遠心力 回転速度の変化 が得られる。



注1

一般的に回転軸 (ω に平行) に角度 θ をなすベクトル r を考える。このベクトルが、角速度 ω で回転する座標に固定されている時に、 dt の時間に变化する量は、回転角 ωdt に回転半径 $r \sin\theta$ をかけて得られる。

$$|dr| = \omega dt r \sin\theta = (\omega r \sin\theta) dt$$

$\omega r \sin\theta$ は $|\omega \times r|$ の定義に等しいので

$$dr = (\omega \times r) dt$$

$$dr/dt = \omega \times r$$

と与えられる。ここで、 r を i', j', k' に置き換えればよい。

