保存力

力学的全エネルギーの保存則を満たすような力を保存力と呼ぶ.それはどの様な力か調べてみよう.簡単のために、ニュートンの運動方程式の s 方向成分、

$$m\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}=F_s \tag{1}$$

を考えよう。(1) 式の両辺に ds を掛けて s_1 から s_2 まで積分すると、運動エネルギーの変化分と為された仕事量の関係が得られる（両辺に速度 v を掛けても良い）:

$$m\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=mv_s\mathrm{d}v_s=F_s\mathrm{d}s、\quad m\int_{v_{s1}}^{v_{s2}}v_s\mathrm{d}v_s=\int_{s_1}^{s_2}F_s\mathrm{d}s、$$

$$\frac{m{v_{s_2}}^2}{2}-\frac{m{v_{s_1}}^2}{2}=\int_{s_1}^{s_2}F_s\mathrm{d}s=\int_{s_1}^{s_2}\boldsymbol{F}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{s}=W。 \tag{2}$$

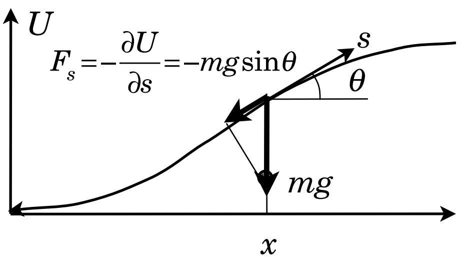
ここで、$\frac{mv_s^2}{2}$ は運動エネルギー、そして、$\int_{s_1}^{s_2}F_s\mathrm{d}s$ は外力 F_s がその物体を位置 s_1 から s_2 まで移動させる間に物体に為した仕事量 W である。すなわち、外力がした仕事 W が、運動エネルギーの形に変わった事を示し、力学的全エネルギーの保存則が成立つことに対応している。この時に、場（地表であれば「重力場」、電磁気的力であれば「電場」など）に内在する（すなわち、ポテンシャル）エネルギー U が物体に仕事をすると考えられ、$W = U(\mathrm{s}_1) - U(\mathrm{s}_2) =-(U(\mathrm{s}_2) - U(\mathrm{s}_1))$ と書け、移動の経路に依らず、位置 s_1, s_2 のみに依存する:

$$\frac{m{v_{s_2}}^2}{2}-\frac{m{v_{s_1}}^2}{2}=\int_{s_1}^{s_2}F_s\mathrm{d}s=-(U(s_2)-U(s_1))。 \tag{3}$$

$$\frac{m{v_{s_2}}^2}{2}+U(s_2)=\frac{m{v_{s_1}}^2}{2}+U(s_1)=E_T. \tag{4}$$

ここで、E_T は力学的全エネルギーで、この運動の保存量である全力学的エネルギーを表している。このように、ポテンシャルエネルギーの勾配に起因する力が働く場合にはエネルギー保存則が成り立ち、その力を保存力と呼ぶ。(3) 式の第2辺と3辺を s_2-s_1=Δs（微少量なので、F_s はその間で一定として良い）で除して、ゼロの極限を取れば保存力は、

$$F_s=-\lim_{\Delta s\to 0}\frac{U(s_1+\Delta s)-U(s_1)}{\Delta s}=-\frac{\partial U}{\partial s}、 \tag{5}$$



と書くことが出来る。U の例としては、重力場、バネ、電場などによるポテンシャルエネルギーがある。

地表の重力場 $U(h)$=$mgh(s)$ の例で考えると、山や谷の凹凸が重力場の依存性を表す。(5) 式から、我々の体験から良く知られた形、山の傾斜 sinθ に比例した力、

$$F_s=-\frac{\partial U}{\partial s}=-\frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial s}=-mg\frac{\partial h}{\partial s}=-mg\sin\theta、$$

を傾斜の-s の方向に受けることが出てくる。