

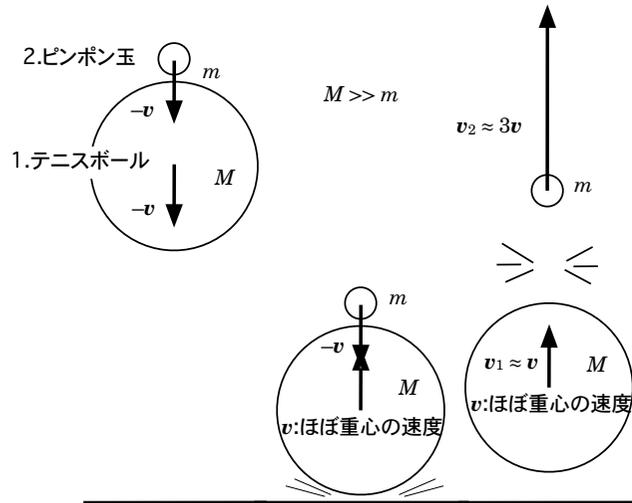
親子ボール

下図のように、大きくて重い硬式テニスボールの上に軽くて小さいピンポン玉を載せたまま自由落下させ（下図左）、床に衝突した後の振舞いを観察しよう。上手くピンポン玉がテニスボールの中心に保てれば、ピンポン玉だけを床で弾ませた場合に較べると遥かに高く、最大で9倍くらい高くまで弾むのを観察できる。

その理由を考えてみよう。議論を簡単にするために、床との反発係数 e は 1（弾性衝突）としよう。概念的には次のように説明できる。テニスボールの質量 M はピンポン玉の質量 m よりも十分に重いので、親子ボールの重心の位置は、ほぼテニスボールの重心（中心）にある。さて、テニスボールが床で反射された直後を考えよう（下図中央）。まず最初に、テニスボールが直前に持っていた速度 $-v$ （鉛直上方を正に取っている）は v に変化する。即ち、床との衝突後の重心速度は上方に v だと考えて良い。ここで考えているのは、テニスボールは床に衝突したが、ピンポン玉はまだテニスボールに衝突する直前の瞬間である。テニスボールは上向きに速度 v でピンポン玉は下向きに $-v$ であるため、両者は相対速度 $2v$ の正面衝突をすることになる。親子ボールの重心がほぼテニスボールの中心にあるため、重心に対する相対速度 $-2v$ を持つピンポン玉の衝突は、静止した壁に弾性衝突するのと同じ振舞い、速度 $-2v$ から $2v$ への変化、をする。即ち、ピンポン玉は、親子ボールの重心から速度 $2v$ で離れていく。重心自身は速度 v で運動しているので、結局、ピンポン玉は $2v+v=3v$ で床から離れていく。

ピンポン玉が弾む高さは、テニスボールと衝突した直後に持っていた運動エネルギー $mv^2/2$ が位置エネルギー mgh に変わるので、ピンポン玉単独の v の 3 倍の速度の持つエネルギー、即ち速度の 2 乗の 9 倍の高さまで上がることになる。

次に、力学的エネルギー保存則と運動量保存則を使って式で予測しよう。



力学的エネルギー保存則

保存力場（ここでは重力場）内で運動する限り、位置の変化に伴う重力ポテンシャルの変化分は運動エネルギーの変化分とちょうど打消すので、運動エネルギーと位置エネルギーの和は親子ボールの衝突前後で変化しない。又、衝突直前と直後を較べると、位置エネルギーは変化しないので、前後の運動エネルギーの和が保存する：

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m(-v)^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (1)$$

左辺は図の中央の絵に相当し、右辺は右の絵の状態を表す。この 2 つの絵の間には、親子ボール間の衝突以外には外からは力が働くことはない。この時には運動量も保存する：

$$Mv - mv = Mv_1 + mv_2. \quad (2)$$

(2) 式を

$$Mv_1 = -mv_2 - mv + Mv \quad (3)$$

と変形して(1)式に代入すると、

$$mv_2^2 = Mv^2 + mv^2 - Mv_1^2 = Mv^2 + mv^2 - \frac{(M-m)^2}{M}v^2 + 2\frac{m(M-m)}{M}vv_2 - \frac{m^2}{M}v_2^2$$

となり、両辺を整理すると、

$$v_2^2 - 2\frac{M-m}{M+m}vv_2 - \frac{3M-m}{M+m}v^2 = 0$$

が得られる。これを解いて

$$v_2 = \left(\frac{M-m}{M+m} \pm \sqrt{\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 + \frac{3M-m}{M+m}} \right) v = \left(\frac{M-m}{M+m} \pm \sqrt{\frac{4M^2}{(M+m)^2}} \right) v$$

となり、

$$v_2 = -v \text{ or } \frac{3M-m}{M+m}v = 3v \frac{1-m/M}{1+m/M}$$

が解になる。しかし、 $-v$ は衝突せずに通過する場合なので物理的に除外され、

$3v \frac{1-m/M}{1+m/M}$ が求めるピンポン玉の速度になる。 $1 \gg m/M$ の場合は、 $3v$ に漸近する。

（一般的に近似をする場合は、 m/M のように物理量の比の形で単位を持たない無次元量として 1 に対して無視できるかどうかを判断する）

確認のために $M=m$ の場合を考えてみると、

$$v_2 = \pm v \quad (\text{「トンネルしない」条件から、} v \text{ のみが物理的に合理的な解})$$

と予想される解を与えることが確認できる。

なお、高校方式（敢えてそう呼ぶ）で、反発係数を使って求める事も出来るが、衝突後は、ピンポン球が上方に正の速度を持つ、と仮定しなければならない。その仮定で解くと、すり抜ける場合に相当する解の $-v$ が出てこなくて、 $+v$ になってしまう事に注意が必要である。この講義で解く時には、高校方式ではなく、**2つの保存則**を用いて解く事を前提にして採点します。