

斜面上の質点の運動

摩擦のない角度 θ の斜面を滑る質点の運動を考えよう。
 x -座標を斜面の上方に取り、 y -座標は斜面の垂直上方に取る。

質点に働く力は（地球の自転などによる見かけの力を除外して考えれば）地球による重力（万有引力） mg のみである。

斜面上の大きさの無視出来る物体は、斜面に平行な方向のみに動ける自由度が与えられているため、斜面に垂直な方向の力の合力は F_y と抗力 N がつり合い、ゼロになっている（ $|F_y|=|N|$ ）。

また、質点ではなく、大きさのある物体の場合には、斜面に接するその物体の支点の周りの回転が起こってはいけない。その条件から、抗力が物体に働く位置は、重心に働く重力 mg と斜面が交わる点になる^{注参照}。

斜面上の質点に働く正味の力は、 x 軸の負の方向を向いた $F_x = -mg \cdot \sin\theta$ のみである。その結果、自由落下と同様に、質点は斜面下方に徐々に加速される。その時の実質的な重力加速度は、自由落下の場合の mg に対して $\sin\theta$ 倍だけ小さい。

結果として、斜面上の物体の運動方程式は、因子 $\sin\theta$ 以外は、自由落下する物体と全く同一になる。力 \mathbf{F} は、座標軸の取り方が自由落下の場合とは変わったので、それに応じて変わる： $\mathbf{F} = (-mg \sin\theta, N - mg \cos\theta = 0, 0)$ 。斜面上の質点の運動方程式はこの力 \mathbf{F} を代入して、

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F} \quad (1)$$

であり、両辺を質量 m で割って x, y, z 成分に分けると、

$$\begin{aligned} dv_x/dt &= -g \sin\theta \\ dv_y/dt &= 0 \\ dv_z/dt &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

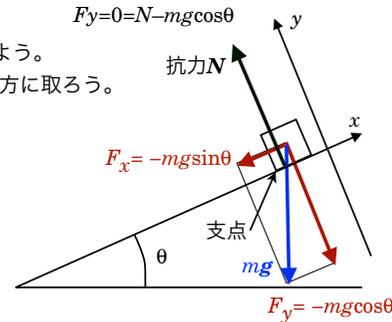
となる。両辺を時間で積分して、**速度の一般解**は

$$\begin{aligned} v_x &= -g \sin\theta \int dt = -gt \sin\theta + C_x \\ v_y &= C_y \\ v_z &= C_z \quad (C_i: \text{積分定数 } i = x, y, z) \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられ、もう一度時間で積分すると、**位置座標の一般解**は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{gt^2}{2} \sin\theta + C_x t + C'_x \\ y &= C_y t + C'_y \\ z &= C_z t + C'_z \quad (C'_i: \text{積分定数 } i = x, y, z) \end{aligned} \quad (5)$$

と求まる。これらの一般解は、時刻 $t=0$ の初期位置や初速度の「初期条件」に相当する任意定数を未だ特定していない任意定数を含むため「あらゆる具体的な初期条件に対応した、全ての可能な」斜面上の質点の運動を表現している。「具体的な初期条件」として任意定数が特定されると、初めてその初期条件に対応した特解が得られることになる。



摩擦がある場合の斜面上の質点の運動

質点と斜面の間に摩擦力が働く場合を考えよう。摩擦力の大きさは、抗力 N の大きさに比例することが知られている。摩擦力の原因は、質点と斜面上の原子間、或いは分子間の引力または斥力である。表面が粗い場合には、凹凸同士が反発し合うために加速が妨げられる。一方、原子の配列レベルまで滑らかである場合には、原子間の引力によって張り付いてしまい、斜面に平行な外力も完全に打ち消される。摩擦の物理は、現在でも、原子間力顕微鏡（Atomic Force Microscope: AFM）のような微視的な測定手段により研究が続けられている。

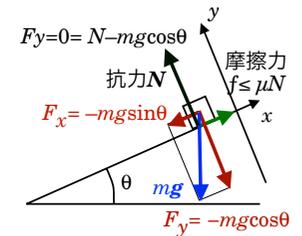
摩擦力の原因から考えて、摩擦力が加速度を産み出すような事はありませんが、外力を打ち消したり弱める効果がある。打ち消すことが出来る最大の摩擦力を、最大（静止）摩擦力 f_{\max} と呼び、摩擦係数 μ と抗力 N を用いて $f_{\max} = \mu N$ （ μ の定義式で、無次元量）と表される。従って、上図のような条件で、質点が斜面を滑り出すためには、 F_x が最大摩擦力 μN よりも大きくなる斜面の角度が必要になる。即ち、滑り出す条件は、

$$mg \sin\theta > \mu N$$

で与えられる。抗力 N の大きさは常に F_y の大きさと等しいので、

$$\sin\theta > \mu \cos\theta, \rightarrow \tan\theta > \mu$$

が質点が斜面上を滑り始める角度になる。斜面上の摩擦係数が場所によらず一定であれば、実質的な効果としては、斜面上の重力加速度を弱める因子 $\sin\theta$ に更に摩擦の因子が加わり、 $(\sin\theta - \mu' \cos\theta)$ の因子だけ重力加速度を弱める。なお、静止時に働く最大摩擦力 $\mu \cos\theta$ と、滑り始めた後の摩擦力 $\mu' \cos\theta$ とは必ずしも同じ大きさになるとは限らないことが知られている。



注) 実際には摩擦があり、滑らない条件を満たす場合のみ支点の周りの回転が生じる。

回転運動の原因を与えるのは、力のモーメント \mathbf{N} である。力のモーメントの大きさは、支点から力が働く点までの位置ベクトル \mathbf{r} と力のベクトル \mathbf{F} の外積で与えられる： $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 。外積の定義から、その大きさは、 $|\mathbf{N}| = rF \sin\theta$ で与えられる。ここで、角 θ ($\leq \pi$) は、2つのベクトルが成す角度。

この例では、力のモーメントの原因になり得る力として、 F_x, F_y, N の3つがある。物体の長さを b 、高さを a とすると、 $\mathbf{r} = \mathbf{F}$ の方向が時計回りの場合を正とすると、力のモーメントの合計は、

$$\begin{aligned} N &= F_y b/2 + N(b/2 - (a/2)\tan\theta) - F_x a/2 \\ &= (mgb/2)\cos\theta - mg(b/2 - (a/2)\tan\theta)\cos\theta - (mga/2)\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

と打消す事が確認出来るので、抗力が働く点が、重心に働く重力と斜面とが交わる点である事が確認される。