質点の運動

地上に於ける質量 m の質点の運動を考えよう。t=0 に初速 $\boldsymbol{v}(0) = 0$ で図１の原点にいる場合を考える。

最初にする事は、ニュートンの第２法則の運動方程式

$$d\boldsymbol{P}/dt = \boldsymbol{F} \qquad (1)$$

に、具体的に「力 $\boldsymbol{F}$」を代入して書き下す（「**運動方程式をたてる**」と表現する）事である。ここで、$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$は運動量。左辺の d$\boldsymbol{P}$/dt は「**運動量の時間変化率**（微分係数）」で、外力 $\boldsymbol{F}$ によって決定される。この微分係数を含む式（**微分方程式**と呼ばれる）を積分する事により、運動量 $\boldsymbol{P}$、速度 $\boldsymbol{v}$ が決定される。(1) 式を積分して $\boldsymbol{P}$ 或は $\boldsymbol{v}$ を求める事を「**運動方程式を解く**」と表現する。

具体的には、外力 $\boldsymbol{F}$ として地球の重力 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ を代入する。この時に大事な点は、どの様な座標系でこの運動を取り扱うのか、と言うことを明確に定義しておくことである。この例では、図１のように、鉛直上方を z 軸にとることにしよう。力 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ をベクトルのまま第２法則に代入すれば、重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}=(0, 0, -g)$ として、

$$d\boldsymbol{P}/dt = m\boldsymbol{g}$$

或いは、

$$d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{g} \qquad (2)$$

が求める**運動方程式**になる。

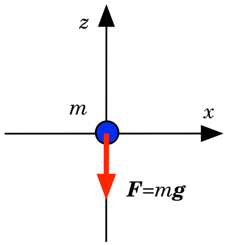

図１：質量 m の質点に地球の重力 $m\boldsymbol{g}$ が働いている。t=0 に初速ゼロで原点にいる。

次に具体的に速度 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$、位置座標 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ についてこの微分方程式を解こう。そのために運動方程式を x-、y-、z-成分に分けて表しておくのが便利であり、

$$dv_x/dt = 0$$
$$dv_y/dt = 0 \qquad (3)$$
$$dv_z/dt = -g$$

を連立させて解く。(3) の両辺を時間 t で不定積分して、**一般解**は

$$v_x = dx/dt = C_x$$
$$v_y = C_y \qquad (4)$$
$$v_z = \int(dv_z/dt)dt = -g\int dt = -gt + C_z \qquad (C_i：積分定数.\ i = x, y, z)$$

と求まる。重力の x, y 成分はゼロなので x, y 方向の速度変化は無く、積分定数のみ。

更に、速度は $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ なので、(4) 式を**位置座標 $\boldsymbol{r}$ の微分方程式**で表し、時間でもう一度不定積分して**位置座標 $\boldsymbol{r}$ の一般解**は

$$x = \int(dx/dt)dt = \int v_x dt = \int C_x dt = C_x t + C'_x$$
$$y = \int v_y dt = C_y t + C'_y \qquad (5)$$
$$z = \int v_z dt = \int(-gt + C_z)dt = -gt^2/2 + C_z t + C'_z \qquad (C'_i：積分定数)$$

と求まる。(4) 式と (5) 式は、共に積分回数と同じ数の**任意定数**（積分定数）を含む「**一般解**」と呼ばれる。

一般解：時刻 $t = 0$ を (4) 式に代入すると

$v_x(0) = C_x,\quad v_y(0) = C_y,\quad v_z(0) = C_z$

また、(5) 式にも時刻 $t = 0$ を代入すると

$x(0) = C'_x,\quad y(0) = C'_y,\quad z(0) = C'_z$

となることから、$t = 0$ における速度や位置を与える**未知定数**を含んだ「**一般的的に成り立つ解**」。従って、**自由落下**だけでなく**投上げ**問題も含んでいる。

特解：未知定数を含む**一般解**に対して、$t = 0$ における速度や位置の **初期値**（**初期条件**）を指定することによって得られる「**特別な条件下における解**」を**特解**と呼ぶ。

次に**速度**の**特解**を求めよう。**自由落下**の場合は、初速度 $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = 0$ の**初期条件**から、$C_x = C_y = C_z = 0$ が得られるので、**速度の一般解** (4) に代入して

$$v_x = v_y = 0,$$
$$v_z = -gt$$

が得られる。初速度 $\boldsymbol{v}(0) = 0$ を、**位置座標の一般解** (5) に代入して得られた結果

$$x = C'_x$$
$$y = C'_y \qquad (6)$$
$$z = -gt^2/ 2+ C'_z$$

に、t=0 で $\boldsymbol{r}$=0 の**位置座標**の**初期条件**を代入して得られる $C'_x = C'_y = C'_z$ =0 から「**自由落下の例の特解**」が以下の様に求まる。

$$x = 0$$
$$y = 0 \qquad (7)$$
$$z = -gt^2/2\ .$$

投げ上げの例

水平面に対して角度θで投げ上げる例を考えよう（図２）。前の例と異なるのは、初速度がゼロでないという**初期条件**の違いだけである。従って、**初期条件**を代入する前の**一般解**、(4), (5) は、そのままこの例にも成り立つ：

$$v_x = C_x$$
$$v_y = C_y \qquad (4)$$
$$v_z = -gt + C_z \qquad (C_i：積分定数.\ i = x, y, z)$$

及び、

$$x = C_x t + C'_x$$
$$y = C_y t + C'_y \qquad (5)$$
$$z = -gt^2/2 + C_z t + C'_z \qquad (C'_i：積分定数)。$$

投げ上げの場合の**特解**を求めるために、**一般解**に順次、**初期条件**を代入しよう。

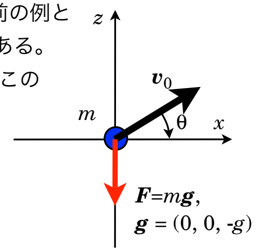

図２：質量 m の質点に地球の重力 $m\boldsymbol{g}$ が働いている。t=0 に、原点で初速 $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0$を持つ。

速度の**初期条件**は、t=0 で

$\boldsymbol{v}(t=0) = \boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\theta, 0, v_0 \sin\theta)$

なので (4) に代入すると、 $C_x = v_0 \cos\theta, C_y = 0, C_z = v_0 \sin\theta$ が決定され、**速度**の**特解**は、

$v_x = v_0 \cos\theta$

$v_y = 0$ (8)

$v_z = -gt + v_0 \sin\theta$

と求まる。

同様に、**位置座標**の**初期条件**は t=0 で $\boldsymbol{r}$=0 なので、$C'_x = C'_y = C'_z = 0$ が得られ、(5) に代入して

$x = v_0 t \cos\theta$

$y = 0$ (9)

$z = -gt^2/2 + v_0 t \sin\theta$

と投げ上げの例の**位置座標**の**特解**が得られる。

x と y の関係

ある時刻 t における「**x と z の関係**」を、時刻 t を消去することにより調べよう。

(9) の第一式から

$t = x/v_0\cos\theta$

なので、(9) の第三式の z に代入すると

$z = -gx^2/2v_0^2\cos^2\theta + x \bullet \tan\theta = x(-gx/2v_0^2\cos^2\theta + \tan\theta)$ (10)

と x の２次関数としての放物線運動が得られる。

この式から、**空気抵抗がない時**に、同じ初速度でも、最も遠方まで飛ばすには投げ上げ角 θを何度にすれば良いかを知ることが出来る。地面に落下したときには $z = 0$ なので、(10) 式に z=0 を代入して x=0 でない解を求める。x について整理すると、

$x = 2v_0^2 \bullet \cos\theta\sin\theta/g = (v_0^2/g)\sin 2\theta$

が得られるので、sin2θが最大になるθ = π/4 の時に最も遠方の v_0^2/g まで飛ぶ。面白いことに、この距離は、初速 v_0 で鉛直上方に投げた場合の高さ $v_0^2/2g$ の丁度２倍になっている。

水平方向の飛距離が cosθ と sinθ の積に比例するのは何故だろうか？

それは、飛距離が、飛行時間 $2v_0\sin\theta/g$（(9)-3 式 (=0) から得られる）と水平方向の速度 $v_0\cos\theta$ の積 $(v_0^2/g)\sin 2\theta$ で与えられるためである。

問１　良く知られているように、最も遠くまで投げるには、45度の角度で投げるのが良い。さて、実際には、空気抵抗がある。この場合は、最長飛距離を出すには、角度を増せばよいか？それとも小さくすべきだろうか？式を用いずに考察してみて下さい。

問２　ボールの遠投をする時に、100 m 先まで投げるのに必要な初速度を重力加速度を g = 9.80 (m/s^2) として求めよ。水平面に対する角度を、45度と θ_0 度の２つの場合を計算せよ。θ_0 は、自分の誕生月に０を付けた角度とする（例：３月は、30度。9月以降は80度を引く：12月は、120 - 80 = 40度）。