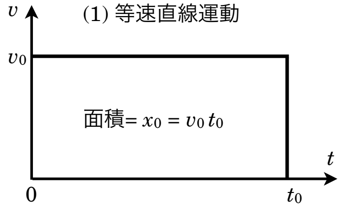
直線運動・等速円運動、 速度と時間

直線運動

(1)　右の図に示す様に、質点が速度 v_0 で等速直線運動をする場合を考える。1秒間に v_0 [m] 進むので、t 秒後の質点の位置 $x(t)$ は、

$x(t) = v_0 t$ [m].　　(1)

(1) 等速直線運動



(2)　一方、一定の力が質点に働き、質点が時間によらない一定の加速度 $a(t) = a_0$ を受けている場合は、1秒間に a_0 [m/s] づつ速度が増すので時刻 t に速度 $v(t)$ は

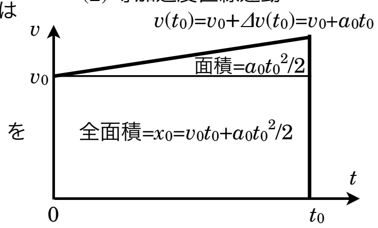
$v(t) = v_0 + \Delta v(t) = v_0 + a_0 t$ [m/s] .　　(2)

従って、t_0 秒後の質点の位置 $x(t_0)$ は、v_0 に時刻 0→t_0 の間の速度の変化分の平均値 $\langle \Delta v(t_0) \rangle = a_0 t_0/2$ を加えた平均速度 $\langle v(t_0) \rangle = v_0 + a_0 t_0/2$ を t_0 倍して

$x(t_0) = (v_0 + a_0 t_0/2)\, t_0 = v_0 t_0 + a_0 t_0^2/2$ [m]　　(3)

で与えられる。

(2) 等加速度直線運動



(3)　更に一般的には $a(t)$ は時間と共に変化するので、速度の変化分 $\Delta v(t)$ は積分で見積もる必要がある：

$\Delta v(t) = \int_0^t a(t')\mathrm{d}t'$,

$v(t) = v_0 + \Delta v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t'$ [m/s],

$x(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t [v_0 + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t']\mathrm{d}t$.

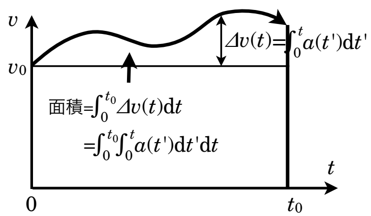
　簡単な例の1つとして (3) を積分によって見積もると、a_0 は定数なので、

$x(t_0) = \int_0^{t_0}(v_0 + \int_0^t a_0 \mathrm{d}t')\mathrm{d}t = \int_0^{t_0}(v_0 + a_0\int_0^t \mathrm{d}t')\mathrm{d}t = \int_0^{t_0}(v_0 + a_0 t)\mathrm{d}t = v_0 t_0 + a_0 t_0^2/2$ [m]　　(4)

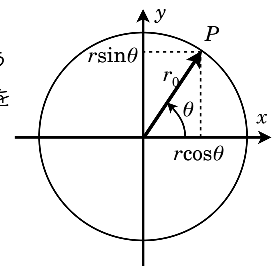
と、(3) 式が得られる。

注：**定数**と**変数**（時間等に依存して変化する量）は区別して表示する：この例では、添字 0 を付けて定数である事を明示した。

(3) 加速度直線運動



等速円運動



　円運動を考える場合は、右図の様な2次元極座標表示を使うのが便利である。等速円運動なので回転角 $\theta(t)$ は角速度 ω_0 を用いて $\theta = \omega_0 t$ と表せる。そうすると、等速円運動する点 P の x 成分と y 成分はそれぞれ $x = r_0\cos \omega_0 t,\ y = r_0 \sin \omega_0 t$ と表される：$\boldsymbol{r} = r_0(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t)$.

　点 P の速度は、 r_0 =一定、に注意して t で微分して、

$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = r_0[\mathrm{d}(\cos \omega_0 t)/\mathrm{d}t, \mathrm{d}(\sin \omega_0 t)/\mathrm{d}t] = r_0\omega_0(-\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t)$

で与えられる。

　加速度はもう一度 t で微分して、

$\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = r_0\omega_0[-\mathrm{d}(\sin \omega_0 t)/\mathrm{d}t, \mathrm{d}(\cos \omega_0 t)/\mathrm{d}t] = -\omega_0^2 r_0(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t)$

$\quad = -\omega_0^2 \boldsymbol{r}$

が得られる。従って、等速円運動の場合は、円運動の中心点の方向に、常に大きさ

$|\boldsymbol{a}| = \omega_0^2 r$

の加速度が働いている事に注意しよう。この加速度は円運動をするために必要不可欠な**向心力**（F_C）による**向心加速度**（$a=F_C/m$、m は質点 P の質量）である。