エネルギー保存則

バネの場合

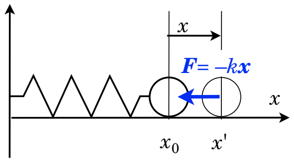

図 1 ：バネと復元力

運動方程式は、

$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = F = -kx$ (1)

で与えられる。両辺を x で x_1 から x_2 まで積分すると、

$m\int_{x_1}^{x_2}(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\mathrm{d}x = -k\int_{x_1}^{x_2}x\mathrm{d}x$

$m\int_{v_1}^{v_2}v\mathrm{d}v = -k\int_{x_1}^{x_2}x\mathrm{d}x$

ここで、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=v$ を用いた。従って、

$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = -kx_2^2/2 + kx_1^2/2$

となる。そこで、添字毎に整理すると、

$mv_2^2/2 + kx_2^2/2 = mv_1^2/2 + kx_1^2/2 =$ 一定

と書くことが出来る。これは、おもりの運動エネルギー $mv^2/2$ とバネの位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）$kx^2/2$ を合わせた、全力学的エネルギー保存の関係を表している。

万有引力と地上の重力加速度の関係

万有引力は

$F = -GMm/R^2$

と表され、$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ は実験的に決定された万有引力定数、M, m は万有引力を及ぼし合う２つの物体の質量、R はそれぞれの重心間の距離、地表では、地球の中心と物体の重心間の距離である。

地上では地球からの万有引力が主に働くので、地表における物体の運動方程式は、

$m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -GMm/R^2$

と書ける。そこで、両辺を R_1 から R_2 まで積分して、

$m\int_{R_1}^{R_2}(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\mathrm{d}R = -GMm\int_{R_1}^{R_2}1/R^2\,\mathrm{d}R$

$m\int_{v_1}^{v_2}v\mathrm{d}v = GMm/R_2 - GMm/R_1$

$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = GMm/R_2 - GMm/R_1$

$mv_2^2/2 - GMm/R_2 = mv_1^2/2 - GMm/R_1 =$ 一定

とエネルギー保存則が得られ、$-GMm/R_1$ は万有引力ポテンシャルと呼ばれ、$R = \infty$ で 0 になる。

一方、地上における（重力）ポテンシャルは、同じ万有引力ポテンシャルであるが、地表面を基準（$GMm/R_\mathrm{E} = 0$ とする）として考えるため、そこからの高さを h とおく：

$mv_2^2/2 - mv_\mathrm{E}^2/2 = GMm/(R_\mathrm{E} + h) =$ 一定

と書ける。さて、通常、地上として考える $h < 1\times10^3$ m と $R_\mathrm{E} \approx 6{,}500\times10^3$ m を比較すると、$h << R_\mathrm{E}$ と地球の半径よりも十分小さな距離 h を考えるので、次の様な近似が成り立つ: $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$,　$(x = h/R_\mathrm{E} << 1)$ ：

従って、$GMm/R_\mathrm{E} = 0$ とおくので、

$-GMm/(R_\mathrm{E} + h) = -(GMm/R_\mathrm{E})(1 + h/R_\mathrm{E})^{-1} \approx -GMm/R_\mathrm{E} + m(GM/R_\mathrm{E}^2)h = m(GM/R_\mathrm{E}^2)h.$

これは通常用いる重力ポテンシャルの mgh と同じはずであるから、万有引力定数を用いて重力加速度 g を

$g = GM/R_\mathrm{E}^2$

と表すことができる。