微分の定義式からの導出

(1)　関数 $y(x)$、$z(x)$ の積

$$\frac{d(y(x)\cdot z(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx} \tag{1}$$

式 (1) を微分の定義式を用いて書き換え、0 を挿入する。

$$\frac{d(yz)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)\cdot z(x+\Delta x) - y(x)\cdot z(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)\cdot z(x+\Delta x) - y(x)\cdot z(x+\Delta x) + y(x)\cdot z(x+\Delta x) - y(x)\cdot z(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}\cdot z(x+\Delta x) + y(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx} \tag{3}$$

(2)　媒介変数 x

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

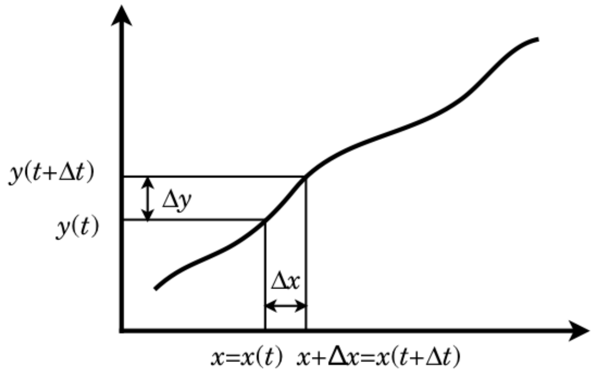

図 1: 共通変数として t を持つ変数 x と $y(x)$ を考える。Δt をゼロに近づけると、Δx と Δy も同時にゼロに漸近する。

図 1 を念頭に置きながら、式 (4) を微分の定義式を用いて書き換える。

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{x(t+\Delta t)-x(t)}\cdot\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

ここで、$\Delta t\to 0$ と共に $\Delta x\to 0$ となることを使った。

(3)　ベキ乗

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{6}$$

$$
\frac{dx^n}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}_nC_{n-1}x^{n-1}\Delta x \cdots + {}_nC_{n-p}x^{n-p}\Delta x^p \cdots + \Delta x^n}{\Delta x}
$$

$$
= {}_nC_{n-1}x^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0}({}_nC_{n-2}x^{n-2}\Delta x \cdots + {}_nC_{n-p}x^{n-p}\Delta x^{p-1} \cdots + \Delta x^{n-1}) = {}_nC_{n-1}x^{n-1} \quad (7)
$$

(4)　三角関数

$$
\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad (8)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\cos x}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\
&= -\sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \quad = -\sin x
\end{aligned} \quad (9)
$$

(5)　対数関数

$$
\frac{d\log_e(1+x)}{dx} = \frac{d\ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} \quad (10)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln(1+x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+x+\Delta x) - \ln(1+x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left\{(1+x)\left(1+\frac{\Delta x}{1+x}\right)\right\} - \ln(1+x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln\left(1+\frac{\Delta x}{1+x}\right) - \ln(1+x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{1+x}\right)}{\Delta x} \\
&= \ln\left\{\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right\} = \ln e^{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x}
\end{aligned} \quad (11)
$$

ここで、指数関数の定義式 (12) を使った。

$$
e^x = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (12)
$$

(6)　指数関数

$$
\frac{de^{-x}}{dx} = -e^{-x} \quad (13)
$$

$$
\frac{de^{-x}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-(x+\Delta x)} - e^{-x}}{\Delta x} = -e^{-x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-e^{-\Delta x}}{\Delta x} \quad (14)
$$

従って、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-e^{-\Delta x}}{\Delta x} = 1$$

を示せばよい。$\Delta x > 0$ なので、$e^{-\Delta x} < 1$ であることから、$e^{-\Delta x} = 1 - \frac{1}{t}$ と置くと、$t > 0$ になる。$\Delta x \to 0$ の時、$e^{-\Delta x} \to 1$ なので $t \to \infty$ である。$-\Delta x = \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ なので、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-e^{-\Delta x}}{\Delta x} = -\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)} = -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}$$

従って、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-e^{-\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

より、式 (13) が証明される。

(7) 逆関数：$y = F(x), x = G(y)$ の時、$G(y)$ を $F(x)$ の逆関数と呼ぶ。

$$\frac{dG(y)}{dy} = 1/\frac{dF(x)}{dx} \tag{15}$$

$G(y+\Delta y) - G(y) = \Delta x$、$\Delta y = F(x+\Delta x) - F(x)$ より、

$$\begin{aligned} \frac{dG(y)}{dy} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{G(y+\Delta y) - G(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 1/\left(\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\right) = 1/\frac{dF(x)}{dx} \end{aligned} \tag{16}$$

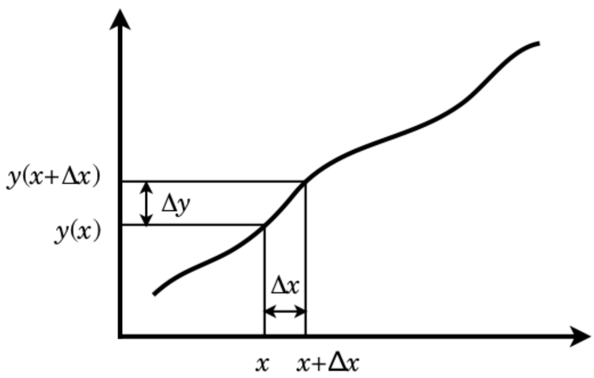

図 2: Δx をゼロに近づけると、Δy も同時にゼロに漸近する。

ここで、図 2 の様に、

$$\lim_{\Delta y \to 0} \text{と} \lim_{\Delta x \to 0}$$

が等価である事を使った。