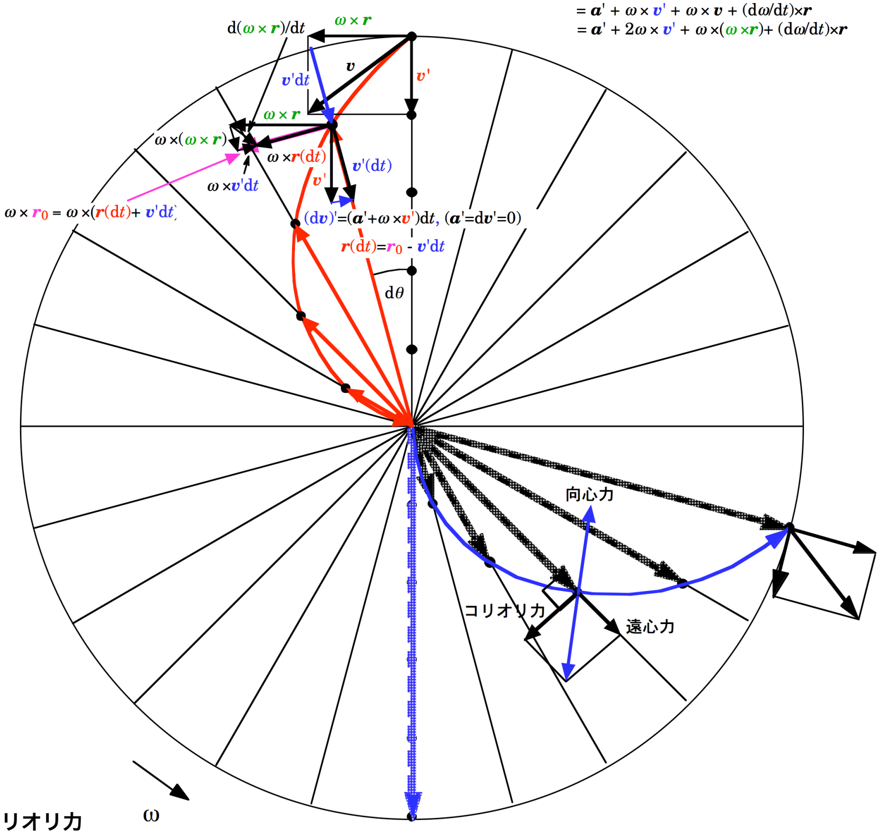
08.4.13

回転座標系における速度と加速度

$\mathrm{d}t$ の経過後、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の変化量は、$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\omega\times \boldsymbol{A}$ で表される。

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \partial\boldsymbol{r}/\partial t + \omega\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{r}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)' + \mathrm{d}(\omega\times\boldsymbol{r})/\mathrm{d}t\\ &= \boldsymbol{a}' + \omega\times\boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{v} + (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r}\\ &= \boldsymbol{a}' + 2\omega\times\boldsymbol{v}' + \omega\times(\omega\times\boldsymbol{r}) + (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$



コリオリ力

回転座標の上で運動を観測すると、**遠心力**、**コリオリ力**などの見かけの力が現れる。上の図で、何故これらの見かけの力が出てくるか考えてみよう。尤も単純な例として、回転する円盤の中心から円周に向かって動径に沿って真っ直ぐ歩く場合を考える（図の下半分）。**回転円盤上**では下向き直線上を動くが、**静止系**から眺めると、曲線上を動いている。この様な曲線上を運動するには**向心力**が必要になる。車であれば、車輪の摩擦力、歩く場合は、床を蹴ることで向心力を生み出す必要がある。床を蹴る方向は、場所によって変化するが、一般的には、進行方向斜め前方向になり、これは、動径方向の遠心力と、進行方向右側の**コリオリ力**（$-2m\omega\times\boldsymbol{v}'$、$\omega$ ベクトルは回転面に垂直で手前向き）に分解できる。コリオリ力は運動する位置 $\boldsymbol{r}$ には依存しないが、**遠心力**（$-m\omega\times(\omega\times\boldsymbol{r}) = mr\omega^2$）は外周に近づくにつれ増大する。

図の上半分では、回転系の運動方程式に現れる項が、視覚的にどの様な量なのかを考える。

速度ベクトル

まず、回転系上の速度ベクトル $\boldsymbol{v}'$ は、図中央の一番上に赤字で示す。この場合は、外周から中心に向かって運動する場合を考えている。$\boldsymbol{v}'$ は円周上から中心に円盤上を直線的に向かう。一方、円盤の回転による速度は緑のベクトル $\omega\times\boldsymbol{r}$ で表される。ω で回転する系におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の変化量は $\omega\times\boldsymbol{A}$ で表される（回転系の運動方程式のプリントの注 1 参照）。従って、静止系から眺めた速度 $\boldsymbol{v}$ はこれらのベクトル和、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{r}$ となる。

加速度ベクトル

次に加速度を考えよう。$\mathrm{d}t$ 経過後の位置 $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}t$、即ち円周 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}t$ だけ内側に入った点における速度の変化を考える。静止系から見た $\mathrm{d}t$ の間の速度の変化量 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ は、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = (\mathrm{d}\boldsymbol{v})' + \mathrm{d}(\omega\times\boldsymbol{r}) \qquad (1)$$

になる。

第 1 項は回転系上の速度の変化量（加速度 × $\mathrm{d}t$） $\mathrm{d}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}'\mathrm{d}t$ と、回転が原因で生じた変化量 $\omega\times\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t$ の和

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{v})' = (\boldsymbol{a}' + \omega\times\boldsymbol{v}')\mathrm{d}t \qquad (2)$$

になる。まず、回転系上の速度 $\boldsymbol{v}'$ は等速直線運動なので、$\boldsymbol{a}' = \mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t$ はゼロである。一方、$\boldsymbol{v}'$ は円盤の回転 ω によって $\boldsymbol{v}'(\mathrm{d}t)$ に向きが変わるため、(2) の第 2 項 $\omega\times\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t$ だけ変化する。

(1) の第 2 項は、円盤の回転により生じる円周方向の速度 $\omega\times\boldsymbol{r}$ の大きさ（コリオリ力）と方向（遠心力）の変化で、$\boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}t$ だけ内側に移動したことによって生じた変化量を表す：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\times\boldsymbol{r})/\mathrm{d}t &= \omega\times\boldsymbol{v} + (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r} = \omega\times(\boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{r}) + (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r}\\ &= \omega\times\boldsymbol{v}' + \omega\times(\omega\times\boldsymbol{r}) + (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r}.\end{aligned} \qquad (3)$$

最後の辺の、第 1 項はコリオリ力の半分（(2) の第 2 項が残りの半分）で円周方向の速度 $\boldsymbol{v}_\theta$ の変化量から生じ、第 2 項は遠心力で動径方向の速度 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{r}}$ の変化量が原因で、第 3 項は円盤の回転速度の変化による見かけの力に対応する。

$\mathrm{d}t$ の後の半径 $\boldsymbol{r}(\mathrm{d}t)$ は、これと平行な回転円盤上の半径ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ を用いて、

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{d}t) = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}'\mathrm{d}t \qquad (4)$$

と書け、この時の円盤の回転による円周方向の速度 $\boldsymbol{v}_\theta$ は、

$$\boldsymbol{v}_\theta(\mathrm{d}t) = \omega\times\boldsymbol{r}(\mathrm{d}t) = \omega\times(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}'\mathrm{d}t) = \omega\times\boldsymbol{r}_0 - \omega\times\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t \qquad (5)$$

になる。結局、$\mathrm{d}t$ の間の $\boldsymbol{v}_\theta$ の変化量は、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\theta = \boldsymbol{v}_\theta(\mathrm{d}t) - \boldsymbol{v}_\theta(0) = \omega\times\boldsymbol{r}_0 - \omega\times\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t - \omega\times\boldsymbol{r}_0 = -\omega\times\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t$$

とコリオリ力の半分になる。コリオリ力は、$\boldsymbol{v}'$ に原因があるので、動かなければ生じない。

良く知られているように、動径方向の速度 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{r}}$ の変化量が遠心力を与える。これは、単純に円盤の回転によって生じる速度 $\omega\times\boldsymbol{r}$ の回転 ω による変化量なので、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{r}} = \omega\times(\omega\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}t \qquad (6)$$

と遠心力を与えることが確認できる。