物理量の表し方

位置座標　$\boldsymbol{r}$ (relative position, 原点に対する相対位置)

1次元、2次元、**3次元**、**右手系**、左手系

直交座標表示（*Cartesian coordinate*）（**３次元**）

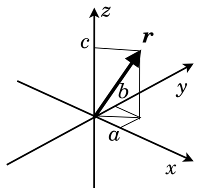
互いに直交した３本の軸（x, y, z 軸）の値で表示

$x = a, y = b, z = c$ （長さの単位は m （メートル））

これらの３つの x, y, z 成分を一纏めにした便利な表記法：

ベクトル表記（位置ベクトル、太字で表す）

$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a, b, c)$



直交座標
(Cartesian coordinate)

極座標表示（*Polar coordinate*）

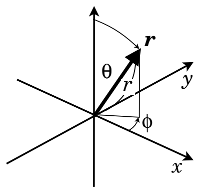
位置ベクトルの長さ：r　[m]

z 軸からの角度：θ　[rad]

x 軸からの角度：ϕ　[rad]

ベクトル表記

$\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi)$



極座標
(Polar coordinate)

直交座標と**極座標**表示の関係

$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

速度 $\boldsymbol{v}$ (velocity)

単位時間 [second: s] の**位置座標 $\boldsymbol{r}$ の変化量**：$\boldsymbol{v} = \Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ [m/s]

ベクトル表記は

$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$

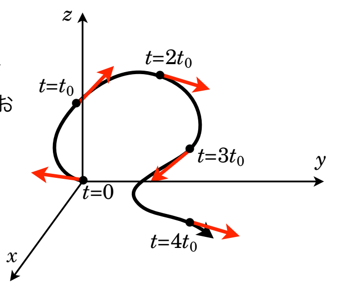
例）右図のように、方向は変化するが、一定の速さで運動する質点を考える。 この場合は、時刻 $t = 2t_0$ における瞬間の速度を、

$2t_0$ における**平均の速さ**：$\bar{v} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\boldsymbol{r}(3t_0) - \boldsymbol{r}(t_0)}{2t_0}$

では表現出来ない。質点の運動方向は常に変化するため、速さ（速度の絶対値）は一定でも、速度（速さと方向を持つベクトル）は時々刻々変化する。

　そこで、Δt を極限まで短くし、**微分係数**を用いて**瞬間速度**を定義する。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$



質点が、時刻 0 から t_4 まで運動しているとき、t_1, t_2, t_3, t_4 における速度はどの様に表現できるか？

加速度 $\boldsymbol{a}$ (acceleration)

単位時間の**速度の変化量**：$\boldsymbol{a} = \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ [m/s^2]

加速度の場合も、速度の方向が時々刻々変化するので、ある時刻の加速度を考えるには、微分係数を用いて定義する。

　微係数を用いた**速度**の定義、$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を、**加速度**の定義式 $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ に代入する。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

力 $\boldsymbol{F}$ (force)

質点が運動を始めたり、その運動が変化するためには、外部から**力**を受ける必要がある。ニュートンの運動法則によると、力が働く時だけ運動が**変化**する。

$m\boldsymbol{a} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$　（運動方程式）

ここで、m は質点の質量 [kg] 。 $\boldsymbol{F} = 0$ の時は、加速度 $\boldsymbol{a}$ はゼロなので、速度 $\boldsymbol{v}$ は時間が経過しても変化しない（等速直線運動をする：慣性の法則）。

　力の単位は、m [kg] と $\boldsymbol{a}$ [m/s^2] の積に対応して、[kg•m/s^2] と書ける。ニュートンがこの関係式を定式化したので、この単位を [N]：[ニュートン] と呼ぶ。

$\boldsymbol{F}$ [kg•m/s^2] = $\boldsymbol{F}$ [N]　（力の単位）

　あらゆる２物体間には、それらの２物体を結ぶ直線上に、**万有引力**が働く。**万有引力**の大きさは、ニュートンによる惑星軌道の解析により、力を及ぼし合う２つの物体のそれぞれの質量の積に比例し、それらの間の距離の２乗に反比例する事が明らかにされている。

$F = G\dfrac{Mm}{R^2}$　（万有引力）

ここで、M, m は２つの物体のそれぞれの質量、R は２物体間の距離を表す。そして、比例係数 G は万有引力定数と呼ばれ、実験的観測から、$G = 6.67\times10^{-11}$ [m^3/(kg•s^2) = Nm^2/kg^2] と決定された。

　地球と地表の物体間に働く**万有引力**は**重力**と呼ばれる。**重力**は物体の質量 m に比例し、その比例係数は重力加速度 $\boldsymbol{g}$ と定義される。万有引力の式から、

$F = G\dfrac{Mm}{R^2} = mg$

より $g = G\dfrac{M}{R^2}$ と表され、$g \approx 9.80$ [m/s^2] であることが知られている。

運動量 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$

運動の激しさを示す物理量として**運動量 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$** が定義される。

運動量を変化させる事が出来るのは**外力**であることが、ニュートンの運動法則

$$\left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\right)\ \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$$
（ニュートンの運動方程式。質量 m は時間に依存しない）

により示される。**外力 $\boldsymbol{F}$** と平行方向に、単位時間当り $\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$ の**運動量の変化**を与える。短時間 Δt に一定の力 $\boldsymbol{F}$ が働く場合、ニュートンの運動方程式より、

$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\Delta t$

と表せる。ここで、$\Delta\boldsymbol{P}$ は外力 $\boldsymbol{F}$ が Δt の間働いた結果生じた**運動量の総変化量**を表す。その大きさは**力積**と呼ばれる。

例）プロ野球のピッチャーは時速150 [km/h] 以上の豪速球を投げる。一方、キャッチャーはその豪速球をミットで止めなければならない。そのボールの運動量は、ボールの質量を0.3 [kg] とすると、時速150 [km/h] を秒速に直して、$v = 1.5\times10^5/3.6\times10^3 = 41.6$ [m/s] になり、ボールの運動量は

$P = 0.3\times41.6 = 12.5$ [Ns]

になる。この値を使って、キャッチャーミットの厚みの 5 [cm] = 0.05 [m] 動く間に静止させるのに必要な力を運動方程式から見積もることが出来る：

$$\boldsymbol{F}=\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t}=\frac{12.5\ [\mathrm{Ns}]}{0.05\,/\,41.6\ [\mathrm{m/s}]}=\frac{12.5\ [\mathrm{Ns}]}{0.0012\ [\mathrm{s}]}=10{,}416\ [\mathrm{N}]$$

地上の物体の重さに換算すると分かりやすくなりますが、$F = mg$ から m を求めると、

$$m=\frac{\boldsymbol{F}}{g}=\frac{10{,}416}{9.8}=1{,}062\ [\mathrm{kg}]$$

になります！そうです、約１トンの瞬間的な重さがキャッチャーミットに加わるのです。

でも、体重が100 [kg] 程度のキャッチャーは飛ばされたりしませんよね！？

その理由が、力積と運動量の変化量の関係式にあります。

$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\Delta t$

Δt はほんの 0.0012 [s] にしかなりません。そうすると、運動量の変化量（力積）は、

$\Delta P \approx 10$ [Ns]

で、これがキャッチャーとボールが、ピッチャーから受け取った総運動量になります。体重が100 [kg] のピッチャーであれば、

100[kg]•v=10[Ns]

より、$v = 0.1$ [m/s] 程度の速さです。これなら地面との摩擦で容易に止められそうです。

初等物理学で使う数学

初等物理学では、ニュートンの**運動方程式**を扱います。

$$\left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\right)\ \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

この式を**「解く」**ことにより、**$\boldsymbol{t}$ 秒後の物体の運動を知る**事が目的になります。

この式には**微分係数**が含まれています。このような微分係数を含む方程式を、**「微分方程式」**と呼びます。

「初等物理学を学ぶ事」は、運動方程式という**「微分方程式の解き方**を学ぶ事」と表現することも出来ます。具体的には**「微分方程式を積分する」**ことになります。

- 運動方程式を解いて求めたい量は、微分係数の変数、$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}$ 等です。
- 解くために必要な物理量は「外力 $\boldsymbol{F}$」です。

すなわち、**問題文から読み取るべき**は「外力 $\boldsymbol{F}$」が**どのようなものか**？を抽出する事です：どちらの**方向**に？どんな**大きさ**で？どれだけの**時間**？

すなわち、外力 $\boldsymbol{F}$ を運動方程式に代入して、運動方程式を積分します。

具体的には、講義で例題毎に解法を見て行きます。

必要な数学

- 簡単な微分
- 簡単な積分
- ベクトルの初歩的取り扱い