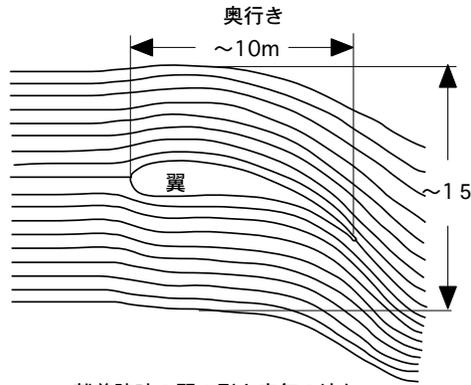


ジャンボジェット機の揚力の運動量保存則による考察

○飛行機の翼の役目は、運動量保存則から考えると、空気に下方への運動量を持たせ、逆に翼が上向きの運動量を得ることにある。

○翼は、空気に対して進行方向にはその運動量を変化させないと仮定する。すなわち、上下方向のみの運動量を与えると考える。翼は後縁に向かって下がっており、空気がなめらかに翼に沿って流れれば、自然と下方向きの運動量を得ることになる。簡単のために、翼を通過した後、空気が下方45度の運動量を持つとしよう。ジャンボジェット機が離陸をするためには、速度 v が



離着陸時の翼の形と空気の流れ

$$v = 300 \text{ km/h} \approx 83 \text{ m/s}$$

になる必要がある。その時、空気の下方への速度成分は、

$$v_d = v \cdot \sin(\pi/4) \approx 0.7v$$

となる。

○さて、毎秒あたり、どれだけの質量 M の空気が下方への運動量を持つか見積もる必要がある。翼の全幅 w は約 50 m ある。また、翼の平均の奥行き D は 10 m 程度だと考え、翼の上下に奥行きと同程度、すなわち、厚さ t が 15 m 程度の空気層がその運動量を斜め下方に変えると仮定する。そうすると、密度 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ 、速度 $v = 83 \text{ m/s}$ を用いて、単位時間にその層を通過する空気の質量は、

$$M/\Delta t = \rho \cdot v \cdot w \cdot t = 1.3 \cdot 83 \cdot 50 \cdot 15 = 8.1 \cdot 10^4 \text{ kg/s} \quad (1)$$

となる。そうすると、空気の得る下方への単位時間あたりの運動量 (=力) は

$$F = \Delta P/\Delta t = M \cdot v_d/\Delta t = 8.1 \cdot 10^4 \cdot 83 \cdot 0.7 = 4.7 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 [\text{N}] = M_F \cdot g \quad (2)$$

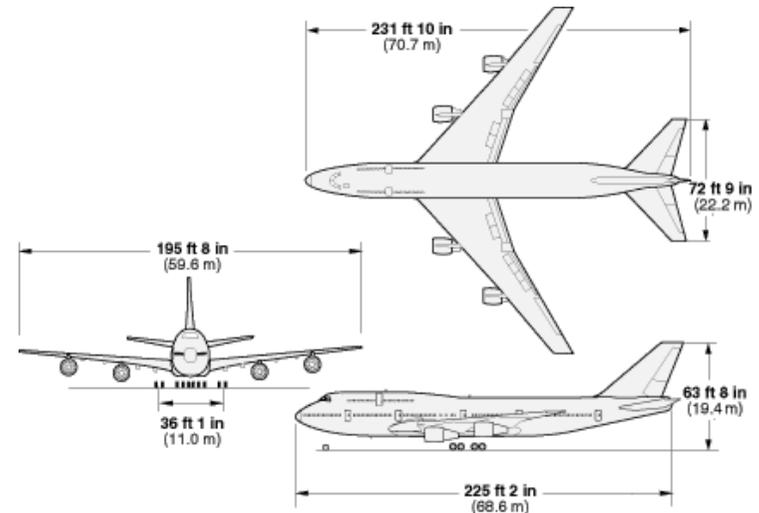
で与えられ、揚力荷重 M_F は 470 トンと得られる。これは、ジャンボジェット機の最大荷重約 400 トンに匹敵しており、これらの考察が合理的な見積もっていると考えられる。

○推力荷重の見積りでも同様であるが、運動量を下方に変える空気層の厚さ、空気層の下方への速度成分の大きさ等の見積りには数十から 100% 程度の曖昧さがあり、厳密には運動方程式を用いて数値計算により見積もる必要がある。

○以上の考察は、流体力学的な考察と比較される。翼の形状から上側の空気流が早くなり、エネルギー保存則からその分だけ圧力が下がる（運動エネルギー、圧力による仕事、

位置エネルギーの合計が一定：ベルヌーイの定理。非圧縮性流体に適用できる理論だが、非常に早い流れでは定性的な傾向は正しいと期待される。)。翼面積は 400 m² 以上あることを考えると、1 気圧の圧力差により 4,000 トンの揚力になるので、離陸時には 0.1 気圧程度の翼上下面における圧力差が生じていると期待される。

○揚力を生み出すために生ずる、翼の部分の空気の下流は、翼端の部分に渦巻きを生じさせることが知られている。翼の直後の部分の空気の下流の上側では圧力が下がり、翼の外側から空気を引き込み、その下側では加圧された空気が外側に押し出されるためである。



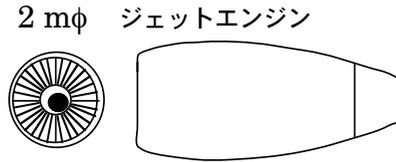
ボーイング社のHPより引用

ジェットエンジンの推進力の運動量保存則による考察

運動量保存則を用いて4発のジャンボジェット機の推進力を見積もる。

○ジェットエンジンの役割は、後方への運動量を空気と与え、逆にエンジンが前方への運動量を得ることにある。そのために、ジェットタービンで強制的に空気を吸い込み、燃焼により体積を膨張させ燃焼ガスの排出速度を増し、後方への運動量を最大にする。

○ジェットエンジンの開口部の直径は約2 mとする。回転軸部分の直径を0.8 mとすれば、有効吸気断面積 S は $3 \text{ m}^2 - 0.5 \text{ m}^2 = 2.5 \text{ m}^2$ となる。そこから吸い込む空気の速度は、近似的に、ジェットタービンの羽根の走る速度に等しいと考え、毎分約1万回転（毎秒約170回転）と仮定すると、平均直径である約1 mの部分の羽根の速度 v は、 $3 \text{ m} \times 170 \text{ s}^{-1} \sim 500 \text{ m/s}$ (1,800 km/h) になる。この数値はジャンボジェット機の巡航速度、約900 km/h を考えると、尤もらしい値である。しかし、地上で低速の時には空気の粘性も大きく、この数分の一程度になっているであろう。そこで、 v を1/3の約150 m/sと仮定しよう。



○次に、毎秒ジェットエンジンを通して空気の質量 M を見積もってみる。地上での空気の密度 ρ は約 1.2 kg/m^3 なので、

$$M/\Delta t = \rho \cdot S \cdot v = 1.2 \cdot 2.5 \cdot 150 \approx 450 \text{ kg/s} \quad (3)$$

が得られる。そして、吸い込んだ空気とジェット燃料とを混合して燃焼させ、エンジン後部から排出する。その時の排出速度を見積もるには、燃焼後の混合ガスの温度が必要になる。その温度を2,000 Kと仮定すると、常温300 Kの6.7倍なので、排出ガスの体積も6.7倍、従って、排出速度 v_0 も同様に6.7倍になると考えると、 $v_0 \approx 150 \cdot 6.7 \approx 1000 \text{ m/s}$ となる（実際には、ジェットエンジンの出口は細く絞ってあるので、もっと速くなり得る）。従って、空気と与えた毎秒あたりの運動量（＝エンジンが受ける力）は

$$F = \Delta P/\Delta t = M/\Delta t \cdot v_0 \approx 450 \cdot 1000 = 4.5 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \text{ [N]} \quad (4)$$

になる。空気は静止していたので、最初に空気の持っていた運動量は $0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ であり、ジェットエンジンが空気と与えた運動量は反対向きにジェットエンジンが得る運動量でなければならない。 $F = M_P \cdot g$ (M_P はジェットエンジンの推力荷重、 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ は重力加速度) より、**ジェットエンジン1基の推力荷重は**

$$M_P \approx 4.5 \cdot 10^4 \text{ kgw} = 45 \text{ トン}$$

になる。4基分合計で180トンとなり、全重量 $M_J = 400 \text{ トン}$ のジャンボジェット機は加速度

$$\alpha = \Delta v/\Delta t = F/M_J = 4M_P \cdot g/M_J = 180 \cdot g/400 = 0.45g \approx 4.5 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

で加速される。離陸可能速度、時速約300 km (約秒速80 m) に加速するためには約1.8秒かかる。その間の平均秒速は40 mなので、滑走距離は最低720 m必要で、25

00 mの滑走路があれば離陸可能であり、合理的な結果と考えられる。

○この推力は、ジェット機の揚力を生み出すためにも利用するので、加速に利用できるのは推力－揚力になる。揚力は速度の2乗に比例するので、離陸当初はほとんど加速に利用され、離陸時には加速に利用されるのは推力の $\sin(\pi/4) \approx 0.7$ 倍程度になる。