２）エネルギー積分を使う方法

　エネルギー積分とは、運動方程式

$m\,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -kx$

を積分する際に、両辺に$\mathrm{d}x$ を掛けて長さで積分する方法を指す。その結果（力×長さ=仕事）がエネルギーの次元を持つ事から、エネルギー積分と呼ばれる。両辺に $\mathrm{d}x$ を掛けて

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = mv\mathrm{d}v = -kx\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v) \tag{5}$$

積分すると、

$$\frac{mv^2}{2} = m\int v\mathrm{d}v = -k\int x\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2} + \mathrm{const.} \tag{6}$$

が得られる。左辺は錘の運動エネルギーを、右辺の第１項はバネの位置エネルギーを表し、左辺に移項すると、全運動エネルギーが時間によらず一定、という**エネルギー保存則**になっている事が分かる。積分定数を $kC^2/2$ と書き換え、$k/m = \omega_0^2$ と置くと、

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{k}{m}(C^2 - x^2) = \omega_0^2(C^2 - x^2)、\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\omega_0\sqrt{C^2 - x^2} \tag{7}$$

と変形できる。最後の式を見ると、右辺は x のみの関数なので、両辺を$\sqrt{C^2 - x^2}$ で割って $\mathrm{d}t$ を掛けると変数が両辺に分離され、両辺を積分することが出来る（**変数分離法**）。

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm\omega_0\int\mathrm{d}t = \pm\omega_0 t + \theta_0 \qquad (\theta_0 \text{は積分定数}) \tag{8}$$

 左辺の積分を進めるために変数変換を行う。

$x = C\sin\theta$

と置くと、$\mathrm{d}x = C\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ なので、(8) の左辺は、

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \int\frac{C\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{C^2 - C^2\sin^2\theta}} = \int\mathrm{d}\theta = \theta \quad \left(= \sin^{-1}\frac{x}{C}\right) \qquad \text{（逆三角関数）}$$

と積分でき、位相角θに等しいことが分かる。$t \geq 0$ に対応して$\theta \geq 0$ の領域を選べば

$\theta = \omega_0 t + \theta_0$

より、単振動の一般解として

$x = C\sin(\omega_0 t + \theta_0)$

が得られる。

$C\sin\left(\omega_0 t + \theta_0\right) = C\left(\cos\theta_0\sin\omega_0 t + \sin\theta_0\cos\omega_0 t\right)$

$= A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$、　$(A = C\cos\theta_0、B = C\sin\theta_0)$

から、１）で求めた一般解に等しい解が求まる。