問 1 イ.

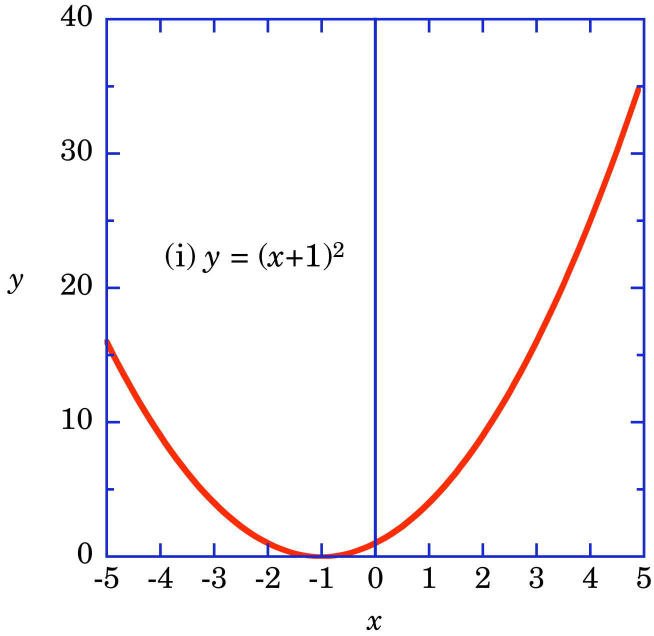
(a) $y = (x+1)^2$

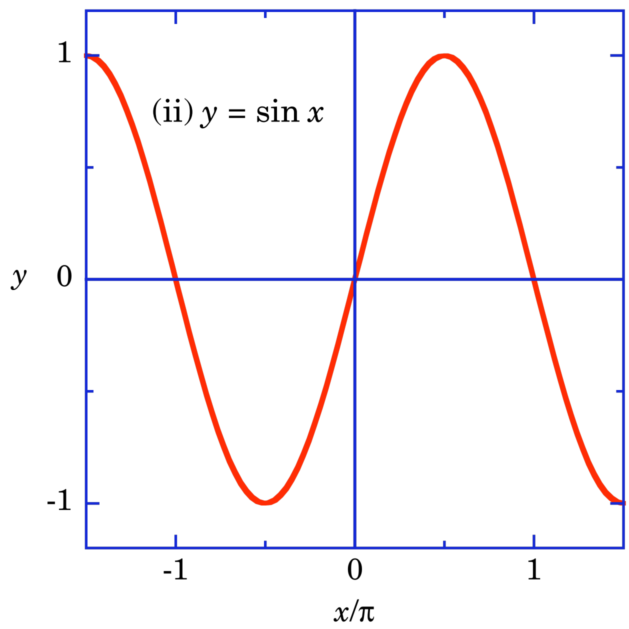
(b) $y = \sin x$

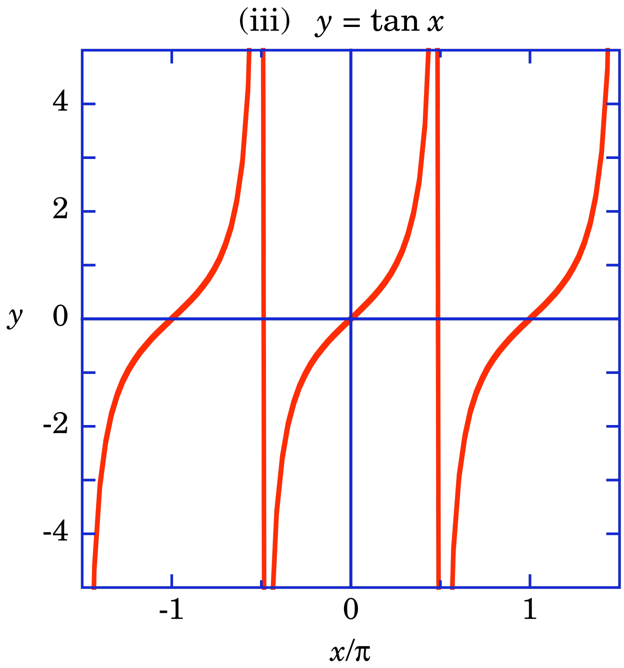
(c) $y = \tan x$

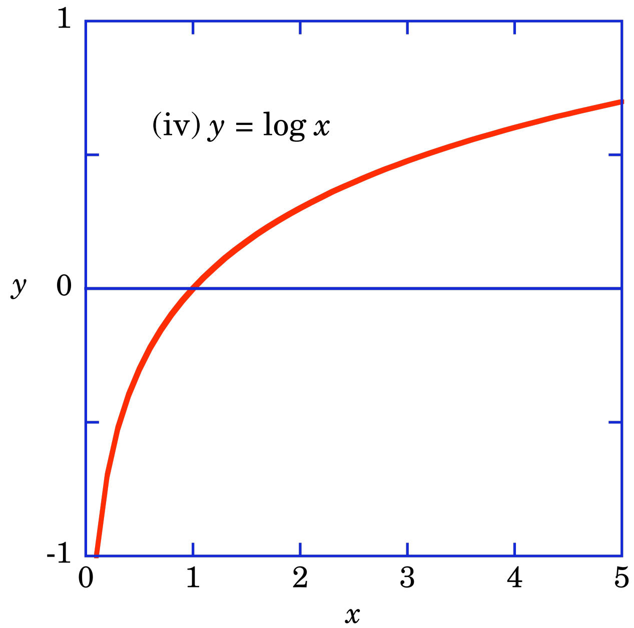
(d) $y = \log x$

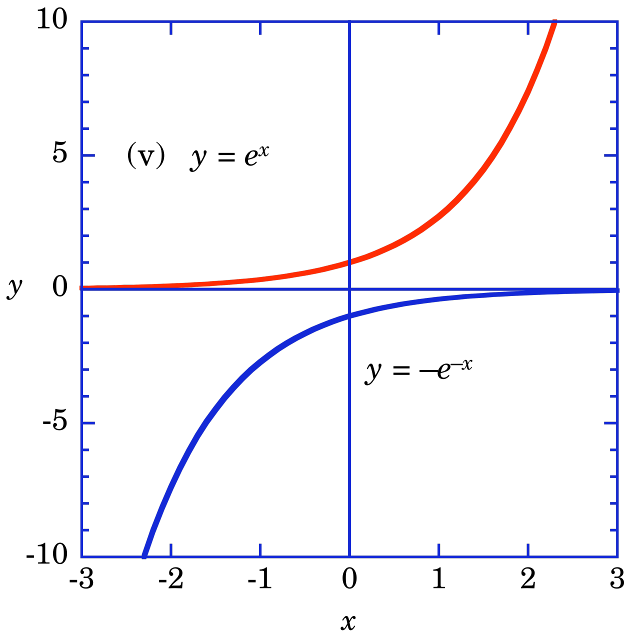
(e) $y = e^x$











ロ. $\dfrac{dF(G(x))}{dx}=\dfrac{dF(G(x))}{dG}\dfrac{dG}{dx}$ に注意して、($(yz)'=y'z+yz'$、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{dx/dy}$ も便利です)

(a) $y=x^2$, $\dfrac{dx^2}{dx}=2x$

(b) $y=\cos x$, $\dfrac{d\cos x}{dx}=-\sin x$,

(c) $y=(ax^2+bx+c)^2$ 、ここで $z=ax^2+bx+c$ と置くと、$y=z^2$ となり、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}=\frac{dz}{dx}\frac{d(z^2)}{dz}=(2ax+b)\ 2z=2\ (2ax+b)(ax^2+bx+c)$$

(d) $y=(x+a)^n$, $\dfrac{d(x+a)^n}{dx}=n(x+a)^{n-1}$

(e) $y=e^{-x}$, $\dfrac{d(e^{-x})}{dx}=-e^{-x}$, ($g=-x$ と置くと、 $\dfrac{d(e^g)}{dx}=\dfrac{dg}{dx}\dfrac{d(e^g)}{dg}=-e^{-x}$)

(f) $y=\log x=\log_{10}x$, $\dfrac{d}{dx}\log x=\dfrac{d}{dx}(\log_{10}e\bullet\log_e x)=\log e\bullet\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{\log e}{x}$

$y=\log_e x=\ln x$, $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$ ($y=\ln x=\log_e x$ の逆関数 $x=e^y$ を用いて $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{dx/dy}$)

(g) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x\cdot\frac{1}{x})}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

ハ.

(a) $y=x$, $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

(b) $y=ax^2+b$, $\displaystyle\int(ax^2+b)\,dx=\frac{ax^3}{3}+bx+C$

(c) $y=\cos x$, $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$,

(d) $y=e^{-x}$, $\displaystyle\int e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}+C$

(e) $y=1/x$, $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

二．ベクトルの和算とかけ算

和　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_x, a_y, 0) + (b_x, b_y, 0) = (a_x+b_x, a_y+b_y, 0)$

内積（スカラー積、積はベクトルではない）

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=ab\cos\theta$,

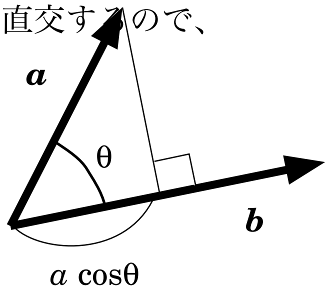
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を直交座標の３つの単位ベクトルとすると、これらは互いに直交するので、

$\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k}=1$, $\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{i}=0$

となる．従って、

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

が得られる．



外積（ベクトル積、積はベクトル）

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin\theta$, 方向は右図の通り．

従って、平行なベクトルの外積はゼロになる．

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$,

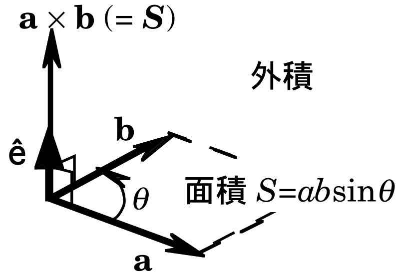
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$

が成り立つ．従って、

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$

が得られる．



問２

時速 80 km/h を秒速に直せば、

80 km/h = $8\mathrm{x}10^4$ m/h = $8\mathrm{x}10^4/3.6\mathrm{x}10^3$ m/s =2.2x10 m/s

なので、

① 1秒間の間に、約 22 m 進む。

② 直線上を等速度運動（慣性運動）をしているので、コインを投げ上げる時に速度と垂直な方向にしか力を加えないため、電車の進行方向の速度成分の変化は起らず、手を離れている間も手とコインは電車と同じ速度成分で進むため、また手の上に落ちてくる。

③ 空中にいる時に働く力は重力のみ。

問３

① 電車はレールから車輪を押されて向心力を受け、弧を描く。一方、載っている人はその向心力が足の裏に（或はつり革につかまったり、扉に寄っかかっていれば、そこから）しか働かないので、載っている人の重心は元通り直線上を等速度直線（慣性）運動する。

　所が、慣性運動をしている人は、円運動する電車の床に足裏を引っ張られる（すくわれる）ので、見かけ上、自分の重心に反対向きに力が働くために壁の方に倒れていると感じる。

それは「慣性力」と呼ばれるが、慣性運動している時に、加速度運動をする周囲の床や壁から及ぼされる力と逆向きの見かけ上の力である。（本当の力は、床から足の裏に働く力）

② スペースシャトル内では、シャトルも内部の人間も慣性運動をしようとするが、地球からの重力（向心力）による加速度運動のために、地球に落下するため結果的に円運動をする。

電車内と違うのは、重力による向心力が、シャトルだけではなく、人間にも等しくその重心に働くため、共に同じ円運動をするので、壁との距離は変化しない。

（逆に表現すると、人間は力（重力）を受けているため、慣性運動をしていない。）

自由落下するエレベーターの中でも同じです。

問４

笹舟の進行方向を直角方向に変えるためには、運動量ベクトル（質量×速度）の向きを直角に変える必要がある。そのためには、始めに持っていた運動量 P_x をゼロに減速し、直角方向の運動量 P_y を持たせれば良い。それに必要な力の方向は、「ハ」である。
加えた力に時間をかけた力積 $F_x \cdot \Delta t$ が P_x になるまで吹けば良い。ハの方向に吹けば、$P_y = F_y \bullet \Delta t$ の直角方向の運動量で進んでいく。