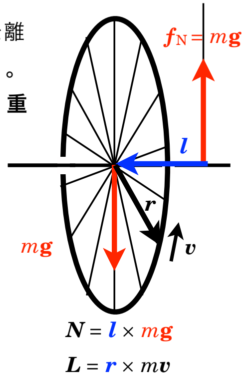
車輪の回転運動の解析

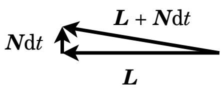
　回転している車輪の軸を両手で支えている。その軸から両手を離せば、間違いなく回転状態を保ったまま鉛直下方に落下していく。これは、質点系の運動の解析から分かるように、重心の運動は、**重心に全重力**が加わっている様に振舞うことから理解できる。



しかし、右図のように一ヶ所でも軸を支えていれば、そこには**全重力と吊り合うだけの抗力** f_N が働き、車輪は落下しない。しかし、支点と車輪の重心の位置が一致していないので、力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l} \times m\boldsymbol{g}$ が発生し歳差運動を引起こすだろう。

　ニュートンの回転の運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$



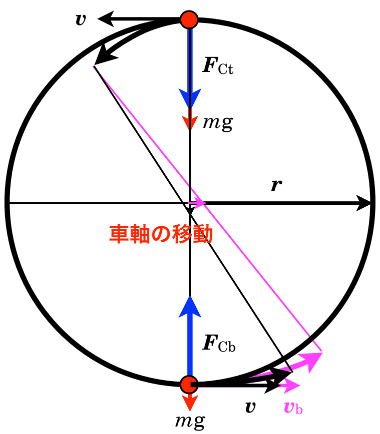
によると、力のモーメント $\boldsymbol{N}$ が働いて $\mathrm{d}t$ の時間が経過すると

$$\boldsymbol{L}(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{L}(t) + \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t) + \boldsymbol{N}\mathrm{d}t$$

と変わっていく。右図に示す様に、角運動量と平行な回転軸が単位時間当たり力のモーメントの分だけ傾いていくことを示している。重力による力のモーメントは床面に平行なので、車輪を床面方向に傾けることなく、**車軸が床に平行な面内で歳差運動**することが期待される。

　さて、車軸を一ヶ所で支えた場合に、何故、床の方に倒れないか？ということを回転の運動方程式に頼らずに説明を試みよう。

　設定を簡潔にするため右図の様に、2つの質量 m の質点のみを考察する。回転軸を固定している場合、これらの質点には向心力 $F_C=mv^2/r$ が働き、それは上下端にいる瞬間は鉛直下方と鉛直上方を向く。



　次に、車軸の一端のみを支える場合を考察する。車軸の片方の支えを外すと、重心に働いていた重力を釣り合せる抗力は、残った一端の支点に移動するため、質点には直接鉛直下方を向く重力が加わる。質点が**上端**にいると、合力は固定軸の場合に加わる向心力 F_C よりも mg だけ**大きく**なり、質点の**回転半径は車輪の半径** r **よりも小さく**なる。一方、**下端**では向心力が F_C よりも mg だけ**小さく**なり、**回転半径は車輪の半径** r **より大きく**なる。車軸の支えの一端を外した直後は上下の２質点の速度は等しいため、回転半径の小さな上端の方が下端よりも落下量が大きくなり、車軸は図の様に主に下方に移動（落下）していく。その結果、全力学的エネルギー保存則に従い、この落下分だけ２質点の運動エネルギーは増加する。

　車軸を一ヶ所で支えてから十分に時間が経過すると、重力が作用する中で定常的な運動に移行していくであろう。その時の上端の質点の速度を $v_t=v$ とすると、エネルギー保存則に従い、半回転後には下端まで運動し、位置エネルギーの減少分 $2mgr$ だけ運動エネルギーが増加し 速度は $v_b=\sqrt{v^2+4gr}$ に加速される。その後、上端まで上昇すると $2mgr$ だけ運動エネルギーを失い速度は元の v に戻る。結果として、回転途中に摩擦などの運動エネルギーのロスが無い限り、車輪の各部分が得る重力による仕事量の総和（運動エネルギーの増減）は一周するとゼロになり、定常状態ではそれ以上の車軸の落下は起こらない。一方、下端では加速された分だけ「上端の左への移動量」よりも余分に右に移動するため、車軸は右方向に移動していく。これが「歳差運動」を引き起こす。

　さて、この説明が成立つのは、下端においても正味の向心力が有限に残っていて、質点に上向きの速度成分を与えられる場合に限られる。重力が向心力の鉛直上方成分より大きくなるほど最初の質点の速度が遅い場合、車軸が鉛直下方を向くまで落下して質点を加速しても正味の向心力の鉛直上方成分が正にならなければ歳差運動は起こらない。この場合は、車軸が鉛直下方を向いた後、そこを中心に、主に、鉛直面内を振動することになる。

　この様な複雑な運動の解析を行わなくても、ニュートンの運動方程式に向心力を取り込んだ回転の運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

は、直感的に容易な予測を可能にして回転運動を表現できる、非常に優れた運動方程式であることがわかる。